فصل سوم

توابع چند متغیره

مقدمه

تا به حال با تابع یک متغیره $y = f(x)$ آشنا شده‌ایم. حال می خواهیم مفهوم تابع را به توابعی با چند متغیر تعمیم دهیم. همان‌طور که می‌دانیم مجموعه اعداد حقیقی R به صورت $R = \{x \mid x \in R\}$و صفحه به صورت $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ و همچنین فضای سه بعدی به صورت $R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$ تعریف می‌شوند.

در این فصل ابتدا به معرفی فضای n بعدی R^n می پردازیم و سپس توابع چند متغیره که تعمیمی از تابع یک متغیره با بیش ازیک متغیر مستقل می‌باشد را تعریف نموده و در ادامه مفاهیم مربوط به دامنه، برد، حد، پیوستگی و مشتق را برای این نوع توابع بیان کرده و خواص مربوط به آنها را بررسی می‌کنیم.

۳-۱ معرفی و خواص توابع چند متغیره

تعریف ۳-۱-۱ (فضای n بعدی). مجموعه همه n تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را فضای n بعدی می‌نامند و با R^n نشان می‌دهند که در آن:

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$$

و $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک نقطه در فضای n بعدی نامیده می‌شود.

تعریف ۳-۱-۲ (تابع nمتغیره). یک تابع n متغیره مجموعه‌ای است از جفت‌های مرتب به شکل (P, w) که در آن هیچ دو جفت مرتب متمایز عنصر اول برابر ندارند.

$P = (x_1 ,....,x_n)$ نقطه‌ای در فضای n بعدی و $w = f(x_1 ,....,x_n)$ یک عدد حقیقی است. مجموعه تمام مقادیر ممکن P را دامنه (قلمرو) تابع و مجموعه تمام مقادیر ممکن w را برد تابع می‌گویند. نمایش یک تابع چند متغیره به صورت زیر است:

$$f: \ R^n \longrightarrow R$$
$$(x_1 ,...., x_n) \to w = f(x_1 ,...., x_n)$$

دامنه یک تابع n متغیره مجموعه‌ای است از نقاط در فضای R^n و برد آن مجموعه‌ای است از اعداد حقیقی.

به عنوان مثال اگر $n=1$ باشد آن‌گاه تابع یک متغیره با دامنه زیرمجموعه R و برد آن زیرمجموعه‌ای از R خواهد بود.

$$f: \ R \longrightarrow R$$
$$x \to y = f(x)$$

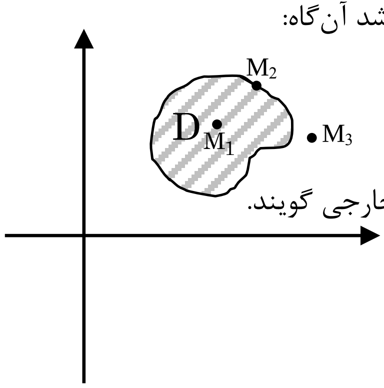
اگر $n=2$ ، تابع دو متغیره بوده و قلمرو آن زیر مجموعه نقاطی از R^2 و برد آن نیز زیرمجموعه‌ای از R می‌باشد.

$$f: \ R^2 \longrightarrow R$$
$$(x,y) \to z = f(x,y)$$

و در حالت $n=3$ تابع سه متغیره بوده و قلمرو آن زیرمجموعه نقاطی از R^3 با برد زیرمجموعه‌ای از R.

$$f: \ R^3 \longrightarrow R$$
$$(x,y,z) \to u = f(x,y,z)$$

تعریف۳-۱-۳. فرض کنید D ناحیه‌ای زیر مجموعه R^2 باشد آن‌گاه:



الف) به نقاطی که داخل ناحیه است، نقاط داخلی گویند.

ب) به نقاطی که روی ناحیه است، نقاط مرزی گویند.

ج) به نقاطی که خارج ناحیه است، نقاط بیرونی یا نقاط خارجی گویند.

نقطه داخلی: M_1

نقطه مرزی: M_2

نقطه خارجی: M_3

نقاط داخلی می‌توانند، نقاط مرزی باشند ولی عکس این مطلب، صادق نیست.

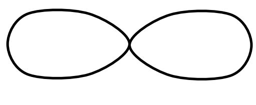
تعریف۳-۱-۴. یک ناحیه را باز گویند هرگاه همه نقاط آن داخلی باشد. یعنی شامل نقاط مرزی نباشد. در این صورت نقاط دایره به مرکز (x_0 , y_0) و به شعاع r یک ناحیه باز است:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$$

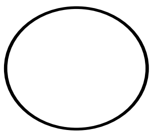
و یک ناحیه را *بسته* گویند هرگاه شامل نقاط مرزی نیز باشد. یعنی شامل نقاط روی دایره و داخل دایره به شعاع r و به مرکز (x_0 , y_0) است:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2$$

تعریف ۳-۱-۵ . ناحیه D را *ساده* گوییم هرگاه منحنی مرز آن، خود را قطع نکند.

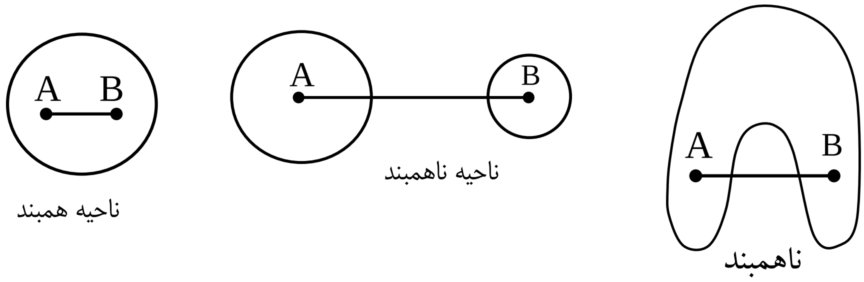


ناحیه غیرساده



ناحیه ساده

تعریف ۳-۱-۶. یک ناحیه را همبند گویند، هرگاه بتوان هر دو نقطه را با یک خط در آن ناحیه طوری به هم وصل کرد که همه نقاط این خط، در ناحیه باشد.



مثال ۳-۱-۱. دامنه و برد تابع $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$ را بیابید.

حل.

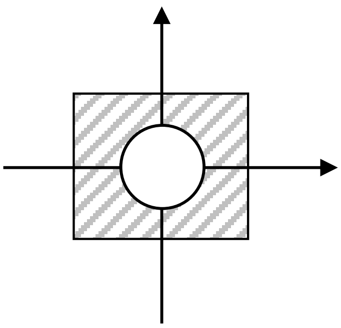
$$25-x^2-y^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow x^2+y^2 \leq 25$$

پس دامنه آن همه نقاط درون و روی دایره‌ای به شعاع ۵ می‌باشد.

و چون $0 \leq f(x,y) \leq 5$ پس برد آن فاصله $[0,5]$ می‌باشد.

مثال ۳-۱-۲. دامنه تابع دو متغیره $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$ را بیابید.

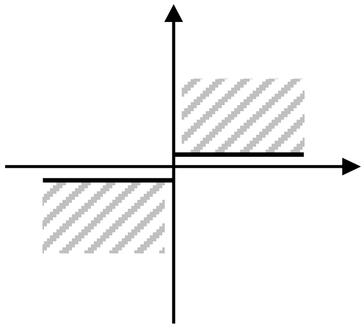
حل.



$$x^2+y^2-25>0 \quad \Rightarrow x^2+y^2>25$$

پس دامنه آن فقط نقاط خارجی دایره‌ای به شعاع ۵ می باشد. پس نقاط مرزی را شامل نمی‌شود.

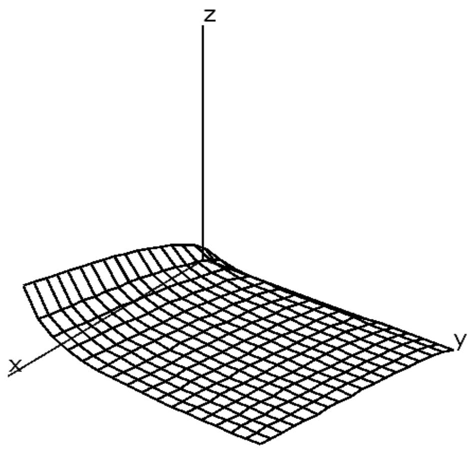
مثال ۳-۱-۳. دامنه تابع $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ را بیابید.



حل.

$$\frac{x}{y}\geq 0 \longrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \quad , \quad y>0 \\ x\leq 0 \quad , \quad y<0 \end{cases}$$
$$y\neq 0$$

نمودار این تابع با استفاده از نرم افزار $Matlab$ به صورت زیر است:



❋ مقدار هر تابع چند متغیره را می توان در هر نقطه از دامنه آن حساب نمود.

مثال ۳-۱-۴.

۱) اگر $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$ آن‌گاه :

$$f(3,-4)=\sqrt{25-(3)^2-(-4)^2}=0$$

۲) اگر $f(x,y,z)=2x^2e^z+y\tan^{-1}x$ آن‌گاه :

$$f(1,1,1)=2\times 1^2\times e^1+1\times\tan^{-1}1=2e+\frac{\pi}{4}$$

❋ دامنه تعریف بعضی توابع در حالت کلی چنین است:

الف) اگر $f(x,y)=\dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$ آن‌گاه : $D_f=D_g\cap D_h-\{(x,y)\mid h(x,y)=0\}$.

ب) اگر $f(x,y)=\sqrt[2k+1]{g(x,y)}$ که در آن k عدد طبیعی است آن‌گاه: $D_f=D_g$.

ج) اگر $f(x,y)=\sqrt[2k]{g(x,y)}$ که در آن k عدد طبیعی است آن‌گاه :

$$D_f=\{(x,y)\mid g(x,y)\geq 0\}.$$

د) اگر $f(x,y)=\log_{h(x,y)} g(x,y)$ آن‌گاه

$$D_f=\{(x,y)\mid g(x,y)>0\,,h(x,y)>0\,,h(x,y)\neq 1\}.$$

تمرینات ۳-۱

۱- با فرض این‌که $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$ $f(x,y)$ را بیابید.

۲- دامنه و برد تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+4}$ را بیابید.

۳- دامنه توابع زیر را بیابید:

الف) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{4-y^2}}$ ب) $f(x,y)=Log\,\dfrac{xy}{y+2}$

ج) $f(x,y)=\dfrac{4}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$ د) $f(x,y)=\sin^{-1}\dfrac{x}{2}+2\sqrt{xy}$

۴- برد توابع زیر را بیابید:

الف) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+3}$ ب) $f(x,y)=\sqrt{36-x^2-y^2}$

۳-۲ حد و پیوستگی توابع چند متغیره

تعریف۳-۲-۱. حد تابع $f(x,y)$ وقتی که (x,y) به سمت (x_0, y_0) میل می‌کند برابر L است هرگاه:

$$\exists L, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in D_f, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$
$$\Rightarrow \left| f(x,y) - L \right| < \varepsilon$$

می‌نویسیم:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

مثال ۳-۲-۱. مقدار حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید:

۱) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} (2x+3y)$ ۲) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^3-y^3}$

۳) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

حل.

(۱) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (2x+3y) = 2\times1 + 3\times2 = 8$$

(۲) $$f(0,0) = \frac{0-0}{0^3-0^3} = \frac{0}{0}$$

مقدار تابع در نقطه $(1,1)$ به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید که مبهم است. برای محاسبه حد، صورت و مخرج را تجزیه کرده و عوامل مشترک را حذف و حد تابع را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x^2+1xy+y^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (۳)$$

مقدار تابع در نقطه $(0,0)$ مبهم و به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید. برای محاسبه حد آن از مختصات قطبی کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$
$$\Rightarrow \lim_{(r,\theta)\to(0,\frac{\pi}{2})} \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r} = 0$$

❋گوییم تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) حد ندارد، هرگاه حداقل دو مسیر یافت شود بطوری‌که به مقادیر متمایزی منجر شود.

مثال ۳-۲-۲. نشان دهید که حد تابع $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در مبدای مختصات وجود ندارد.

حل.

در مسیر $x=0$ داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

در مسیر $y=0$ داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

چون حد تابع از دو مسیر متفاوت به دو مقدار مختلف منجر می‌شد، لذا حد تابع در مبدای مختصات وجود ندارد.

تعریف۳-۲-۲. گوییم تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0 , y_0) پیوسته است، هرگاه تابع در آن نقطه دارای مقدار و حد بوده و آن دو با هم برابر باشند. یعنی:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0 , y_0)} f(x,y) = f(x_0 , y_0)$$

مثال۳-۲-۳. پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & x^2+y^2>1\end{cases}$ را بررسی کنید.

حل.

$$\lim_{x^2+y^2\to 1} f(x,y) = \lim_{x^2+y^2\to 1} \sqrt{1-x^2-y^2} = 0$$

همچنین $f(x,y)\big|_{x^2+y^2=1} = \sqrt{1-1} = 0$

لذا تابع در نقاط مرزی پیوسته است. بنابراین تابع در کل صفحه پیوسته است.

تعریف۳-۲-۳ . مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $f(x,y)$ را *نقاط انفصال* تابع f گویند. البته این نقاط می‌تواند به صورت منحنی یا یک ناحیه باشد.

مثال۳-۲-۴. نقاط انفصال تابع $f(x,y)=\dfrac{1+xy}{x^2-y^2}$ را بیابید.

حل.

$x^2-y^2=0$ پس $y=\pm x$. بنابراین مجموعه نقاط انفصال تابع، نیمساز ربع اول و سوم و نیمساز ربع دوم و چهارم است.

....

*مطالب گفته شده در مورد حد و پیوستگی را می‌توان برای توابع سه متغیره و درحالت کلی برای توابع n متغیره تعمیم داد.

تمرینات ۳-۲

۱- حد توابع زیر را در مبدای مختصات در صورت وجود بیابید:

الف) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ ب) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

ج) $f(x,y)=\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ د) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

۲- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3x-y}{27x^3-y^3}$ را در صورت وجود بیابید.

۳- پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را بررسی کنید.

۳-۳ مشتقات جزیی (نسبی)

تعریف ۳-۳-۱. مشتق جزیی تابع دو متغیره $f(x,y)$ را نسبت به متغیر x با $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا f_x نشان می‌دهد که در آن :

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

به همین ترتیب مشتق جزیی تابع $f(x,y)$ را نسبت به y با $\frac{\partial f}{\partial y}$ یا f_y نشان می‌دهند که در آن :

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

مشروط بر این‌که حدود فوق موجود باشند.

مثال ۳-۳-۱. اگر $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$ باشد، آن‌گاه f_x , f_y را بیابید.

حل.

$$f_x(x,y) = 6x - 2y$$
$$f_y(x,y) = -2x + 2y$$

مثال ۳-۳-۲. اگر $f(x,y) = Ln\left(x^2 + 2xy + y^2\right)$ باشد، آن‌گاه $f_x(-1,4)$ را بیابید.

حل.

$$f_x(x,y) = \frac{2x+2y}{x^2+2xy+y^2} \Rightarrow f_x(-1,4) = \frac{-2+8}{1-8+16} = \frac{6}{9}$$

مثال ۳-۳-۳. با فرض $u = f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$u_x + u_y + u_z$$

حل.

$$u_x = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad u_y = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$, u_z = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow u_x + u_y + u_z = -\frac{x+y+z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

تعریف ۳-۳-۲ (دیفرانسیل کل تابع). دیفرانسیل کل تابع $f(x,y)$ را با df نشان می‌دهیم که در آن :

$$df = f_x\, dx + f_y\, dy$$

مثال ۳-۳-۴. دیفرانسیل کل تابع $u = f(x,y) = xy^2 + 3xe^y + y^2$ را بیابید.

حل.

$$u_x = y^2 + 3e^y$$

$$u_y = 2xy + 3xe^y + 2y$$

$$du = \left(y^2 + 3e^y\right) dx + \left(2xy + 3xe^y + 2y\right) dy$$

تعمیم ۳-۳-۱. اگر u تابعی n متغیره از $x_n,...,x_1$ باشد، آن‌گاه دیفرانسیل کل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$du = u_{x_1}\ dx_1 + u_{x_2}\ dx_2 + ... + u_{x_n}\ dx_n$$

تعریف۳-۳-۳ (قاعده زنجیره‌ای). اگر u تابعی مشتق‌پذیر از y,x باشد که به صورت $u = f(x,y)$ تعریف شده‌است و y,x خود دو تابع دیگر بر حسب r,s مانند $x = F(r,s)$ و $y = G(r,s)$ باشند و همچنین x_r, x_s, y_r, y_s موجود باشند آن‌گاه u تابعی از s,r می‌باشد و داریم:

$$u_r = u_x\ x_r + u_y\ y_r$$
$$u_s = u_x\ x_s + u_y\ y_s$$

مثال ۳-۳-۵. با فرض این‌که $u = Ln\sqrt{x^2+y^2}$، $x = r\,e^s$, $y = r\,e^{-s}$ آن‌گاه u_r, u_s را بیابید.

حل.

$$u_x = \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \qquad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$y_s = -re^{-s} \quad , x_s = re^s \quad , \quad y_r = e^{-s} \quad , \quad x_r = e^s$$

$$u_r = u_x\ x_r + u_y\ y_r = \frac{x}{x^2+y^2}e^s + \frac{y}{x^2+y^2}e^{-s}$$

$$\Rightarrow u_s = u_x\ x_s + u_y\ y_s = \frac{x}{x^2+y^2}re^s - \frac{y}{x^2+y^2}re^{-s}$$

تعمیم ۳-۳-۲. دستور زنجیره‌ای را می‌توان برای تابع n متغیره $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ به صورت زیر تعمیم داد:

$$u_r = u_{x_1}(x_1)_r + u_{x_2}(x_2)_r + \ldots + u_{x_n}(x_n)_r$$
$$u_s = u_{x_1}(x_1)_s + u_{x_2}(x_2)_s + \ldots + u_{x_n}(x_n)_s$$

مثال ۳-۳-۶. اگر داشته باشیم:

$$z = r\sin t\ ,\ \ y = r\cos t\ ,\ \ x = r\ ,\ \ f(x,y,z) = u = xy + xz + yz$$

آن‌گاه u_r, u_s را بیابید.

حل.

$$u_x = y + z \quad , \quad u_y = x + z \quad , \quad u_z = x + y$$
$$y_r = \cos t \quad , \quad z_r = \sin t \quad , \quad x_t = 0 \ , \quad x_r = 1$$
$$y_t = -r\sin t \ , \quad z_t = r\cos t$$
$$u_r = (y+z)(1) + (x+z)\cos t + (x+y)\sin t$$
$$u_t = (y+z)(0) + (x+z)(-r\sin t) + (x+y)r\cos t$$

تمرینات ۳-۳

۱- مشتقات جزیی توابع داده شده زیر را بیابید:

الف) $f(x,y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ ب) $f(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)$

ج) $f(x,y) = \sin xy + \tan^{-1} xy$ د) $f(x,y) = \cosh\sqrt{xy} + e^{\sqrt{xy}}$

۲- اگر $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y^2}{x}$ باشد، $f_x(\sqrt{5},-2)$ را بیابید.

۳- اگر f تابعی مشتق‌پذیر و b, a اعداد ثابتی باشند و $z = f(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}ay^3)$، نشان دهید: $ay^2\, z_x + bx\, z_y = 0$

۳-۴ مشتقات جزیی مراتب بالاتر

تعریف ۳-۴-۱. اگر مشتقات جزیی تابع دو متغیره $f(x,y)$ موجود باشند، آن‌گاه در صورت وجود، مشتقات جزیی این مشتقات را مشتق جزیی مرتبه دوم تابع $f(x,y)$ می‌نامند که به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ مشتق جزیی مرتبه دوم تابع f نسبت به متغیرهای x و y نامیده می‌شوند.

$f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ مشتق جزیی مرتبه دوم تابع f نسبت به x

$f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ مشتق جزیی مرتبه دوم تابع f نسبت به متغیرهای y, x

$f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ مشتق جزیی مرتبه دوم تابع f نسبت به y می‌باشد.

مثال ۳-۴-۱. مشتق‌های جزیی مرتبه دوم تابع $f(x,y) = e^x \sin y + Ln\, xy$ را بیابید.

حل.

$$f_x = e^x \sin y + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_{xx} = e^x \sin y - \dfrac{1}{x^2} \\ f_{xy} = e^x \cos y \end{cases}$$

$$f_y = e^x \cos y + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_{yx} = e^x \cos y \\ f_{yy} = -e^x \sin y - \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$$

* به همین ترتیب می‌توان مشتقات جزیی مرتبه سوم تابع دو متغیره $f(x,y)$ را تعریف نمود. به عنوان مثال برای محاسبه $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ یا f_{yyx} کافی است ابتدا دوبار نسبت به y و سپس یک بار نسبت به x از تابع f مشتق بگیریم.

مثال ۳-۴-۲. در مثال ۳-۴-۱ مقدار $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ را بیابید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin\, y - \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin\, y$$

* اگر f تابعی سه متغیره باشد، آن‌گاه مشتقات جزیی، مانند توابع دو متغیره حساب می‌شوند.

مثال ۳-۴-۳. برای تابع $f(x,y,z) = \sin(xy + 2z)$، f_{xzy} را بیابید.

حل.

$$f_x = y\cos(xy + 2z)$$

$$f_{xz} = -2y\sin(xy + 2z)$$

$$f_{xzy} = -2\sin(xy + 2z) - 2xy\cos(xy + 2z)$$

* طبق قضیه‌ای اثبات می‌شود درصورتی‌که مشتقات مرتبه دوم تابع دو متغیره $f(x,y)$ موجود باشند، $f_{xy} = f_{yx}$ ولی در حالت کلی چنین نیست.

وقتی f_{yx} ، f_{xy} با هم برابرند که تابع در نقطه (x,y) تعریف شده و در یک همسایگی از آن پیوسته باشد.

مثال ۳-۴-۴. اگر $f(x,y) = x^2y^3 + y$ ، نشان دهید : $f_{xy} = f_{yx}$.

حل.

$$f_x = 2xy^3 \quad \Rightarrow f_{xy} = 6xy^2$$
$$f_y = 3x^2y^2 + 1 \quad \Rightarrow f_{yx} = 6xy^2$$
$$\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$$

تمرینات ۳-۴

۱- مشتقات جزیی مرتبه دوم تابع $f(x,y) = xy^3 + \cos xy + e^{x+3y}$ را در صورت وجود بیابید.

۲- با فرض $f(x,y) = e^{xy} + \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ و $x \neq 0, y \neq 0$ عبارت $y\,f_{xy} - x\,f_{yx}$ را ساده کنید.

۳- در تابع $f(x,y,z) = e^{xyz}$ مقدار $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ را بیابید.

۴- در تابع $f(x,y) = \sinh\dfrac{x}{y} + \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$ مقدار f_{yy} را بیابید.

۵- در تابع $f(x,y) = x^2y^3 + y\sin xy$ نشان دهید $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

۳-۵ مشتقات جهتی و گرادیان

تعریف ۳-۵-۱(مشتق جهتی). اگر f تابعی دو متغیره از y, x باشد و بردار $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ بردار یکه باشد، آن‌گاه مشتق جهتی تابع f در جهت بردار یکه $\vec{u}$ را با $D_u f$ نشان می دهند که در آن:

$$D_u\ f(x,y) = f_x\ \cos\theta + f_y\ \sin\theta$$

مثال ۳-۵-۱. اگر $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ و $\vec{u}$ بردار یکه در جهت زاویه $\frac{\pi}{6}$ باشد، آن‌گاه $D_u f$ را بیابید.

حل.

$$f_x = 6x + 4 \quad , f_y = -2y \quad , \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$D_u\ f(x,y) = (6x+4)\cos\frac{\pi}{6} + (-2y)\sin\frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - y$$

....

❋ ناگفته نماند که مشتق جهتی میزان تغییر مقادیر تابعی $f(x,y)$ نسبت به جهت بردار یکه $\vec{u}$ را نشان می‌دهد.

حالت خاص. اگر $\theta = 0$ آن‌گاه $\vec{u} = \vec{i}$ و داریم:

$$D_u\ f(x,y) = f_x \cos\theta = f_x$$

اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ آن‌گاه $\vec{u} = \vec{j}$ و داریم:

$$D_u\ f(x,y) = f_y\ \sin\theta = f_y$$

تعریف ۳-۵-۲ (بردارگرادیان). گرادیان تابع $f(x,y)$ را با $\vec{\nabla}f$ یا $grad\ f$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla}f = f_x\,\vec{i} + f_y\,\vec{j}$$

مثال ۳-۵-۲. بردار گرادیان تابع $f(x,y) = 2x^3y^5 + e^x \sin y + y^2$ را بیابید.

حل.

$$f_x = 6x^2y^5 + e^x \sin y$$
$$f_y = 10x^3y^4 + e^x \cos y + 2y$$
$$\vec{\nabla}f = (6x^2y^5 + e^x \sin y)\,\vec{i} + (10x^3y^4 + e^x \cos y + 2y)\,\vec{j}$$

مثال ۳-۵-۳. نشان دهید $\vec{u} \bullet \vec{\nabla}f = D_u f(x,y)$

حل.

$$\vec{u} \bullet \vec{\nabla}f = (\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) \bullet (f_x\vec{i} + f_y\vec{j})$$
$$= f_x \cos\theta + f_y \sin\theta = D_u f(x,y)$$

مثال ۳-۵-۴. اگر $f(x,y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ ، $\vec{\nabla}f(4,3)$, $D_{\frac{\pi}{4}}(4,3)$ را بیابید.

حل.

$$f_x = \frac{1}{8}x\,, \qquad f_y = \frac{2}{9}y$$
$$\vec{\nabla}f = \frac{1}{8}x\,\vec{i} + \frac{2}{9}y\,\vec{j} \;\Rightarrow \nabla\vec{f}(4,3) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$$

$$D_u f(x,y) = \frac{1}{8} x \cos\theta + \frac{2}{9} y \sin\theta$$

$$D_{\frac{\pi}{4}} f(4,3) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{12}\sqrt{2}$$

تبصره. طبق تعریف ضرب داخلی اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{u}, \vec{\nabla} f$ باشد آن‌گاه چون $\vec{u}.\vec{\nabla} f = D_u f$ پس:

$$D_u f = |\vec{u}|\,|\vec{\nabla} f|\cos\theta$$

$D_u f$ وقتی ماکزیمم است که $\cos\theta = 1$، یعنی $\theta = 0$ و چون $|\vec{u}| = 1$ پس:

$$\max(D_u f) = |\vec{\nabla} f|$$

مثال ۳-۵-۵. اگر $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 3x - y$ ، $|\vec{\nabla} f|$ را در نقطه (۲- و ۱) بیابید.

حل.

$$\vec{\nabla} f = (4x+3)\,\vec{i} + (-2y-1)\,\vec{j} \quad \Rightarrow \vec{\nabla} f(1,-2) = 7\vec{i} + 3\vec{j}$$

پس:

$$|\vec{\nabla} f| = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$$

تعمیم. مشتق جهتی و بردار گرادیان را می‌توان برای توابع سه متغیره نیز تعمیم داد یعنی اگر f تابعی سه متغیره از z, y, x باشد و برداریکه $\vec{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

که در آن α, β, γ زوایای هادی می‌باشند، داریم :

$$D_u f(x,y,z) = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta + f_z \cos\gamma$$

$$\vec{\nabla} f = f_x\,\vec{i} + f_y\,\vec{j} + f_z\,\vec{k}$$

مثال ۳-۵-۶. اگر $f(x,y,z)=3x^2+xy-2y^2-yz+z^2$ آن‌گاه :

الف) میزان تغییرات تابع f در نقطه $(1\,,\,-2\,,\,-1)$ در جهت بردار $2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ را بیابید.

ب) گرادیان تابع f را در آن نقطه بیابید.

حل.

الف)

$$\vec{u}=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{9}}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3} \quad , \quad \cos\beta=-\frac{2}{3} \quad , \quad \cos\gamma=-\frac{1}{3}$$

$$,\ f_y=x-4y-z\ ,\ f_z=-y+2z \quad f_x=6x+y$$

$$D_u\ f(x,y,z)=(6x+y)\cos\alpha+(x-4y-z)\cos\beta+(-y+2z)\cos\gamma$$

$$D_u\ f(1,-2,-1)=\frac{2}{3}\times 4+10\times(-\frac{2}{3})+0\times(-\frac{1}{3})=-4$$

ب)

$$\vec{\nabla}f=(6x+y)\vec{i}+(x-4y-z)\vec{j}+(-y+2z)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}f(1,-2,-1)=4\vec{i}+10\vec{j}+0\vec{k}$$

تمرینات ۳-۵

۱- مطلوب‌است مشتق جهتی تابع $f(x,y)=Ln\sqrt{x^2+y^2}$ در نقطه (۱و۱) و در جهت نیمساز ربع اول وسوم و محورهای مختصات.

۲- اگر مشتق تابعی در یک نقطه و در هر جهت دلخواه برابر صفر باشد، این نقطه را نقطه سکون گویند. برای تابع $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4x-2y$ نقاط سکون را بیابید.

۳- بردار گرادیان تابع $f(x,y,z)=x+y^2z-xz$ در نقطه $(1,2,-3)$ بیابید.

۴- زاویه بین بردارهای گرادیان تابع $f(x,y)=x^2+\frac{y^2}{2}-4x-3y$ در نقاط $(2,5),(4,3)$ بیابید.

۳-۶ صفحه مماس و خط قائم بر سطوح

تعریف۳-۶-۱. سطح S به معادله$f(x,y,z)=0$ و نقطه $(x_0\,,y_0\,,z_0)$ واقع بر سطح را در نظر می‌گیریم. صفحه‌ای که شامل کلیه خطوط مماس بر منحنی‌هایی که از این نقطه می‌گذرند و واقع بر سطح S می‌باشند را صفحه مماس گویند.

اگر S سطحی به معادله$f(x,y,z)=0$ باشد، آن‌گاه صفحه مماس بر سطح S که از نقطه $(x_0\,,y_0\,,z_0)$ عبور می‌کند از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

تعریف۳-۶-۲. خط قائم خطی است که از نقطه $(x_0\,,y_0\,,z_0)$ واقع بر سطح S بگذرد و بر صفحه مماس در این نقطه عمود باشد.

معادله خط قائمی که از نقطه $(x_0\,,y_0\,,z_0)$ می‌گذرد و بر صفحه S عمود باشد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{f_z(x_0,y_0,z_0)}$$

مثال ۳-۶-۱. معادله صفحه مماس و خط قائم بر سطح $x^2+y^2+z^2=14$ را در نقطه $(1,2,3)$ بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14=0\\
&f_x=2x \qquad \Rightarrow f_x(1,2,3)=2\times1=2\\
&f_y=2y \qquad \Rightarrow f_y(1,2,3)=2\times2=4
\end{aligned}$$

$$f_z = 2z \qquad \Rightarrow \ f_z(1,2,3) = 2\times 3 = 6$$

پس معادله صفحه مماس می‌شود:

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$$

و معادله خط قائم می‌شود:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$$

تمرینات ۳-۶

۱- معادله صفحه مماس و خط قائم بر سطح $3xyz - z^3 = 8$ را در نقطه (۲-و۲و۰) بیابید.

۲- معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $x^2+2y^2+3z^2=21$ را طوری بیابید که با صفحه به معادله $x+4y+6z=0$ موازی باشد.

۳- معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $4x^2+y^2-16z=0$ را در نقطه $(2,4,2)$ بیابید.

۴- در کدام نقطه از سطح بیضوی به معادله $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=2$ خط قائم بر سطح با محورهای مختصات زوایای برابر می‌سازد.

۵- صفحه مماس بر سطح بیضوی به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را طوری بیابید که روی محورهای مختصات پاره‌خط‌های مساوی جدا کند.

۳-۷ فرینه (اکسترمم) نسبی توابع چند متغیره

تعریف ۳-۷-۱. اگر f تابعی پیوسته از دو متغیر از y, x باشد به طوری که مشتقات جزیی مرتبه اول و دوم آن موجود باشد، با بدست آوردن نقاط بحرانی از دستگاه $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ و محاسبه $\Delta(x_0 , y_0) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$ در نقطه بحرانی (x_0 , y_0 , z_0) آن‌گاه:

۱) اگر $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ و $\Delta > 0$ ، آن‌گاه تابع f در نقطه بحرانی (x_0 , y_0 , z_0) کمینه (مینیمم) نسبی دارد.

۲) اگر $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ و $\Delta > 0$ ، آن‌گاه تابع f در نقطه بحرانی (x_0 , y_0 , z_0) بیشینه (ماکزیمم) نسبی دارد.

۳) اگر $\Delta < 0$ ، آن‌گاه نقطه (x_0 , y_0 , z_0) نقطه زین اسبی تابع است.

۴) اگر $\Delta = 0$ ، آن‌گاه آزمون نتیجه ندارد.

مثال ۳-۷-۱. نقاط فرینه (اکسترمم) نسبی تابع $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y$ را در صورت وجود بیابید.

حل.

$$f_x = 2x - y + 3 \quad \text{و} \quad f_y = -x + 2y - 2$$

$$\begin{cases} f_x = 2x - y + 3 = 0 \\ f_y = -x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

از حل آن دستگاه نتیجه می‌شود:

$$x = -\frac{4}{3} \quad , \quad y = \frac{1}{3}$$

پس نقطه $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-7}{3})$ یک نقطه بحرانی است.

$$f_{xx} = 2 > 0 \quad , \quad f_{xy} = -1 \quad , \quad f_{yy} = 2$$

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \quad = 2\times 2 - (-1)^2 = 3 > 0$$

پس نقطه $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-7}{3})$ کمینه (مینیمم) نسبی است.

مثال ۳-۷-۲. نقاط فرینه (اکسترمم) نسبی تابع $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$ را در صورت وجود بیابید.

حل.

$$\begin{cases} f_x = 8x^3 - 2x = 0 \\ f_y = 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \ , \quad y = 1$$

پس نقاط $A = (0, 1, -1)$, $B = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{9}{8})$, $C = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{9}{8})$ بحرانی‌اند.

با توجه به آزمون مشتق دوم نقطه A فرینه (اکسترمم) نسبی نیست. نقاطه C, B کمینه (مینیمم) نسبی‌اند.

تعریف ۳-۷-۲. برای یافتن نقاط فرینه (اکسترمم) نسبی تابع سه متغیره $u = f(x, y, z)$ ابتدا نقاط بحرانی را از حل دستگاه $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases}$ می‌یابیم، چنان‌چه مشتقات جزیی تابع f همواره موجود باشد. اگر (x_0, y_0, z_0, u_0) یک نقطه بحرانی تابع $f(x, y, z)$ باشد، برای تعیین نوع این نقطه، دیفرانسیل مرتبه دوم تابع $f(x, y, z)$ را در نقطه (x_0, y_0, z_0, u_0) محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$d^2 f = (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz)^2 f$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx\, dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy\, dz$$

سپس طبق مراحل زیر نوع نقطه بحرانی را مشخص می‌کنیم:

۱) اگر $d^2 f(x_0 , y_0 , z_0) > 0$ باشد، آن‌گاه نقطه (x_0 , y_0 , z_0 , u_0) کمینه (مینیمم) نسبی است.

۲) اگر $d^2 f(x_0 , y_0 , z_0) < 0$ باشد، آن‌گاه نقطه (x_0 , y_0 , z_0 , u_0) بیشینه (ماکزیمم) نسبی است.

۳) اگر $d^2 f(x_0 , y_0 , z_0)$ تغییر علامت دهد، آن‌گاه نقطه (x_0 , y_0 , z_0 , u_0) زین اسبی است.

۴) اگر $d^2 f(x_0 , y_0 , z_0) = 0$ ، آزمون نتیجه ندارد.

مثال ۳-۷-۳. نقاط فرینه (اکسترمم) نسبی تابع زیر را در صورت وجود بیابید:

$$U = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

حل.

$$\begin{cases} f_x = 2x - y + 1 = 0 \\ f_y = 2y - x = 0 \\ f_z = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{2}{3} , y = -\frac{1}{3} , z = 1$$

پس نقطه $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1,\frac{-8}{9})$ بحرانی است.

$$f_{xx} = 2 , f_{yy} = 2 , f_{zz} = 2 , f_{xy} = -1 , f_{yz} = 0 , f_{xz} = 0$$

$$d^2 f(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1) = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 - 2dx\,dy$$

$$d^2 f = 2dx^2 - 2dy\,(dx) + (2dy^2 + 2dz^2)$$

که این عبارت بر حسب dx به صورت یک معادله درجه دوم می‌باشد. حال برای حل آن داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4dy^2 - 8(2dy^2 + 2dz^2)$$

$$\Delta = -12dy^2 - 16dz^2 < 0 \quad , a = 2 > 0$$

بنابراین عبارت درجه دوم همواره مثبت است. در نتیجه $d^2 f(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1) > 0$ پس نقطه $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1,\frac{-8}{9})$ کمینه (مینیمم)نسبی است.

تعریف ۳-۷-۳ (فرینه (اکسترمم)مشروط). گاهی اوقات بیشینه (ماکزیمم) و کمینه (مینیمم) تابع $f(x,y,z)$ را با شرط $h(x,y,z)$ می‌یابند و به آن فرینه(اکسترمم) مشروط می گویند. به‌این منظور تابع $F(x,y,z,\lambda)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\, h(x,y,z)$$

سپس از دستگاه زیر مقدار λ را یافته و نقاط فرینه (اکسترمم) بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} f_x + \lambda h_x = 0 \\ f_y + \lambda h_y = 0 \\ f_z + \lambda h_z = 0 \end{cases}$$

تابع $F(x,y,z,\lambda)$ را تکثیرکن لاگرانژ می‌گویند.

مثال ۳-۷-۴. سه عدد مثبت طوری بیابید که مجموع آنها ۲۴ و حاصلضرب آنها بیشینه شود.

حل.

$$f(x,y,z) = xyz \ , \quad h(x,y,z) = x + y + z - 24$$

$f_z = xy \quad , \quad f_y = xz \qquad f_x = yz$

$$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x+y+z-24) \\ F_x = yz + \lambda = 0 \\ F_y = xz + \lambda = 0 \\ F_z = xy + \lambda = 0 \end{cases}$$

با تعویض جای z, y, x در هریک از معادلات، صورت دستگاه تغییری نمی‌کند. پس، دستگاه نسبت به سه مجهول z, y, x دارای جواب برابر است و جواب دستگاه می شود:

$x = y = z = 8 \quad , \quad \lambda = -64$

تعریف ۳-۷-۴ (لاپلاسین). برای تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ عبارت زیر را لاپلاسین گویند:

$$\nabla^2 f = \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

درصورتی‌که $\Delta f = 0$ ، آن‌گاه تابع f را هارمونیک (تابع همساز) گویند.

مثال ۳-۷-۵. لاپلاسین تابع $f(x,y,z) = 3x^2y^2z + x^2$ را در نقطه (۱و ۰ و ۱) بیابید.

حل.

$f_x = 6xy^2z + 2x \quad , f_{xx} = 6y^2z + 2 \quad , f_{xx}(1,0,1) = 2$

$f_y = 6x^2yz \qquad , f_{yy} = 6x^2z \qquad , f_{yy}(1,0,1) = 6$

$f_z = 3x^2y^2 \qquad , f_{zz} = 0 \qquad , f_{zz}(1,0,1) = 0$

$\nabla^2 f = \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 2 + 6 + 0 = 8$

مثال ۳-۷-۶. با چه شرطی تابع $f(x,y,z) = 2x + ax^2 - 3y^2 + bz^2$ هارمونیک(تابع همساز) است.

حل.

برای همساز بودن باید $\nabla^2 f = 0$ باشد:

$$f_x = 2 + 2ax \qquad f_{xx} = 2a$$
$$f_y = -6y \qquad f_{yy} = -6$$
$$f_z = 2bz \qquad f_{zz} = 2b$$
$$\nabla^2 f = 0 \quad \Rightarrow 2a - 6 + 2b = 0 \quad \Rightarrow a + b = 3$$

تمرینات ۳-۷

۱- نقاط فرینه (اکسترمم) نسبی توابع دو متغیره زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $z = f(x, y) = 4 - (x-y)^2 - (y-1)^2$

۲) $z = f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$

۳) $z = f(x, y) = xy(1 - x - y)$

۴) $z = f(x, y) = (x-y)^2$

۲- نقاط فرینه (اکسترمم) نسبی تابع سه متغیره $u = f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ با شرایط $x > 0, y > 0, z > 0$ را در صورت وجود بیابید.

۳- بیشینه (ماکزیمم) تابع $z = 6 - 4x - 3y$ را تحت شرط $x^2 + y^2 = 1$ بیابید.

۴- نقطه‌ای بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ تعیین کنید که عبارت $3x - 2y + z$ بیشینه (ماکزیمم) شود.

۳-۸ واگرایی (دیورژانس) و چرخه (کرل) یک تابع برداری و نیروی پایستار

تعریف۳-۸-۱ (تابع برداری). اگر در تابع $f: A \to B$ برد تابع، مجموعه B، زیر مجموعه R^n باشد $(n \neq 1)$ آن‌گاه f را تابع برداری می‌گویند مثلا برای $n=3$ داریم:

$$\vec{u} = \vec{f}(x,y,z) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j} + P(x,y)\vec{k}$$

تعریف ۳-۸-۲ (واگرایی(دیورژانس)). اگر f یک تابعی برداری باشد آن‌گاه به حاصلضرب داخلی گرادیان در تابع برداری f واگرایی(دیورژانس) می‌گویند و با $div\,\vec{f}$ نشان می دهند. یعنی:

$$div\,\vec{f} = \vec{\nabla}.\vec{f}$$
$$= (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}).\left(M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j} + P(x,y)\vec{k}\right)$$
$$div\,\vec{f} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

مثال ۳-۸-۱. واگرایی(دیورژانس) تابع برداری زیر را در نقطه $(0,1,1)$ بیابید:

$$\vec{f}(x,y,z) = x^2 y\vec{i} - (x+y^2)\vec{j} - x^3 z^2\vec{k}$$

حل.

$$\nabla\vec{f} = 2xy\vec{i} - 2y\ \vec{j} - 2x^3 z\ \vec{k}$$
$$div\vec{f} = 2xy - 2y - 2x^3 z$$
$$div\,f(0,1,1) = 0 - 2 + 0 = -2$$

تعریف ۳-۸-۳ (چرخه(کرل)). اگر f یک تابعی برداری باشد، آن‌گاه به حاصلضرب خارجی گرادیان در تابع برداری f ، چرخه(کرل) f گویند و با $curl\,\vec{f}$ نشان می‌دهند:

$$curl\ \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

درنتیجه:

$$curl\ \vec{f} = (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z})\vec{i} - (\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\vec{k}$$

مثال ۳-۸-۲. چرخه(کرل) تابع برداری $\vec{f}(x,y,z) = xy\,\vec{i} - 2xz\,\vec{j} + 2yz\,\vec{k}$ را در نقطه $(1,0,1)$ بیابید.

حل :

$$curl\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -2xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= (2z + 2x)\vec{i} - (0-0)\vec{j} + (-2z - x)\vec{k}$$

درنتیجه:

$$curl\ \vec{f}(1,0,1) = 4\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$$

توجه : روابط زیر بین دیورژانس و کرل توابع برداری برقرار است:

$div(\nabla\vec{f} \times \nabla\vec{g}) = 0$ (۱

$div\left(curl\ \vec{f}\right) = 0$ (۲

$div(\nabla\vec{f}) = \nabla^2 \vec{f}$ (۳

$curl(\nabla\vec{f}) = 0$ (۴

$curl(curl\ \vec{f}) = \nabla(div\ \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f}$ (۵

تعریف۳-۸-۴ (نیروی پایستار، تابع پایستار). تابع برداری

$$\vec{F}(x,y,z)=M(x,y,z)\vec{i}+N(x,y,z)\vec{j}+P(x,y,z)\vec{k}$$

در ناحیه ساده همبند D را *پایستار* گویند هرگاه تابع عددی مانند $f(x,y,z)$ یافت شود بطوری‌که $\vec{\nabla}f=\vec{F}$. این تابع عددی f را تابع پتانسیل می‌نامند.

برای این‌که تابع $\vec{F}$ پایستار باشد، باید $curl\,\vec{F}=\vec{O}$

مثال۳-۸-۳. نشان دهید که تابع برداری زیر پایستار است:

$$\vec{F}(x,y,z)=(ze^{x}+e^{y})\vec{i}+(xe^{y}-e^{z})\vec{j}+(-ye^{z}+e^{x})\vec{k}$$

حل.

$$curl\,\vec{F}=(-e^{z}+e^{z})\vec{i}-(e^{x}-e^{x})\vec{j}+(e^{y}-e^{y})\vec{k}=\vec{O}$$

پس تابع برداری $\vec{F}$ پایستار است.

تمرینات ۳-۹

۱- چرخه(کرل) و واگرایی(دیورژانس) تابع برداری زیر را بیابید:

$$f(x,y,z)=x^{2}yz\,\vec{i}+xyz\,\vec{j}+xy^{2}z^{2}\,\vec{k}$$

۲- اگر $\vec{f}(x,y,z)=x^{2}\vec{i}+2y\,\vec{j}+3z^{2}\vec{k}$ آن‌گاه (واگرایی)دیورژانس تابع برداری f را در نقطه (۱و۱و۱) بیابید.

۳- تساوی‌های پنج‌گانه ذیل مثال ۳-۵-۲ را اثبات کنید.

۴- تابع پتانسیل مثال ۳-۸-۳را بیابید.

مثال های حل شده

۱- اگر $f(t)=\ln t\ ,\ g(x,y)=x^2+y$ باشند، آن‌گاه $(fog)(x,y)$ را بیابید.

حل.

$$(fog)(x,y)=f\big(g(x,y)\big)=f(x^2+y)=\ln(x^2+y)$$

۲- اگر $f(x)=\sin^{-1}x\ ,\ g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}$ باشند، $(fog)(x,y,z)$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned} fog(x,y,z) &= f\big(g(x,y,z)\big)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}) \\ &= \sin^{-1}\sqrt{x^2+y^2+z^2-4} \end{aligned}$$

۳- شیب خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطح $z=\frac{1}{2}\sqrt{24-x^2-2y^2}$ با صفحه $y=2$ در نقطه $(2,2,\sqrt{3})$ را بیابید.

حل.

شیب خط مماس برابر مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه مورد نظر است، پس:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{24-x^2-2y^2}}\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(2,2,\sqrt{3})=\frac{-2}{2\sqrt{12}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

۴- یک بشکه بسته استوانه‌ای مستدیر قائم باید ارتفاع ۶ و شعاع داخلی ۲ و ضخامت $0/1$ متر داشته باشد. اگر بهای فلز بکار رفته ۱۰ تومان در هر متر مکعب باشد، هزینه تقریبی فلز بکار رفته برای ساختن این بشکه چقدر است؟

حل.

$$V=\pi r^2 h \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r}=2\pi r h \ , \ \frac{\partial V}{\partial h}=\pi r^2$$

$$dV=\frac{\partial V}{\partial r}dr+\frac{\partial V}{\partial h}dh=2\pi rh\,dr+\pi r^2 dh$$

$$=2\pi(2)(6)(0/1)+\pi(2)^2(0/2)=3/2\pi$$

۵- ابعاد یک جعبه ۱۰و ۱۲و ۱۵ سانتی مترند. این اندازه ها تا $0/02$سانتی متر دقیقند. اگر حجم جعبه با این اندازه‌ها حساب شود، خطای حداکثر را بطور تقریبی بیابید.

حل.

$$V=xyz \ , \ dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$dV=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$$

$$dV=(12)(15)(0/02)+(10)(15)(0/02)+(10)(12)(0/02)=9\ cm^3$$

۶- بافرض $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ، آن‌گاه صحت تساوی زیر را تحقیق کنید:

$$(f_x)^2+(f_y)^2+(f_z)^2=(f(x,y,z))^4$$

حل .

$$f_x=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad f_y=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_z=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(f_x)^2+(f_y)^2+(f_z)^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

درنتیجه:

$$(f_x)^2+(f_y)^2+(f_z)^2=(f(x,y,z))^4$$

۷- درتابع $f(x,y,z)=\cos(xy+2z)$ مقدار f_{xzy} را بیابید.

حل.

$$f_x=-y\sin(xy+2z)$$
$$f_{xz}=-2y\cos(xy+2z)$$
$$f_{xzy}=-2\cos(xy+2z)+2xy\sin(xy+2z)$$

۸- دما در نقطه (x,y) یک صفحه مستطیلی با $T(x,y)=x^2+y^2$ معین می‌شود. میزان تغییر دما در نقطه $(3,4)$ در جهتی که با جهت مثبت محور xها زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان می‌سازد را بیابید.

حل.

$$\vec{u}=\cos\frac{\pi}{3}\vec{i}+\sin\frac{\pi}{3}\vec{j}=\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$T(x,y)=x^2+y^2 \Rightarrow \begin{cases} T_x=2x \\ T_y=2y \end{cases}$$

$$\nabla T(x,y)=T_x\vec{i}+T_y\vec{j}=2x\vec{i}+2y\vec{j}$$

$$D_uT(x,y)=\vec{u}\,.\nabla T(x,y)=\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right).\left(2x\vec{i}+2y\vec{j}\right)=x+\sqrt{3}y$$

$$D_uT(3,4)=3+4\sqrt{3}$$

۹- معادله صفحه مماس و خط قائم بر سطح $x^2+y^2+z^2=19$ را در نقطه $(-2,2,1)$ بیابید.

حل.

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-19=0$$

$$f_x=2x \longrightarrow f_x\big|_P=2(-2)=-4$$

$$f_y=2y \longrightarrow f_y\big|_P=2\times 2=4$$

$$f_z=2z \longrightarrow f_z\big|_P=2\times 1=2$$

معادله صفحه مماس:

$$-4(x+2)+4(y-2)+2(z-1)=0$$

معادله خط قائم:

$$\frac{x+2}{-4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{2}$$

۱۰- سه عدد مثبت طوری بیابید که مجموع آنها ۱۸ و حاصلضرب آنها حداکثر شود.

حل.

$$f(x,y,z)=xyz \quad , \quad h(x,y,z)=x+y+z-18$$

$$, \quad f_z=xy \quad , \quad f_y=xz \qquad f_x=yz$$

$$\begin{cases} yz+\lambda=0 \\ xz+\lambda=0 \\ xy+\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz+x\lambda=0 & (1) \\ xyz+y\lambda=0 & (2) \\ xyz+z\lambda=0 & (3) \end{cases}$$

چون سه متغیر z,y,x دو بدو جابجا شوند، دستگاه بالا تغییر نمی کند، بنابراین $x=y=z$ و از آن نتیجه می شود: $x=y=z=6$

۱۱- با فرض $u = f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ آن‌گاه میزان تغییر آنرا در نقطه $(2,2,-1)$ و در جهت بردار $2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ بیابید.

حل.

$$2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$$

$$= \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i} + \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{j} + \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

$$D_u f(2,2,-1) = \vec{u}.\nabla f(2,2,-1) = 0/042$$

۱۲- درمثال ۱۱ جهت بیشترین میزان تغییر تابع در نقطه $(2,2,-1)$ را بیابید.

حل.

$$\nabla f(2,2,-1) = \frac{-2}{27}\vec{i} + \frac{-2}{27}\vec{j} + \frac{1}{27}\vec{k}$$

$$\frac{\nabla f(2,2,-1)}{|\nabla f(2,2,-1)|} = \frac{\frac{-2}{27}\vec{i} + \frac{-2}{27}\vec{j} + \frac{1}{27}\vec{k}}{\frac{3}{27}} = \frac{-2}{3}\vec{i} + \frac{-2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

۱۳- مقدار a را در تابع $u = f(x,y,z) = axy^2z^2 - ax^3 + x^2yz$ چنان بیابید که تابع در نقطه (۱و ۱ و ۱) همساز (هارمونیک) باشد.

حل.

$$f_x = ay^2z^2 - 3ax^2 + xyz \quad , \; f_{xx} = -6ax + yz$$

$$f_y = 2axyz^2 + x^2z \quad , \; f_{yy} = 2axz^2$$

$$f_z = 2axy^2z + x^2y \quad , \; f_{zz} = 2axy^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(1,1,1) = -6a+1 \\ f_{yy}(1,1,1) = 2a \\ f_{zz}(1,1,1) = 2a \end{cases}$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = 0 \Rightarrow -6a+1+2a+2a = 0 \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۱۴- واگرایی (دیورژانس) تابع برداری $\vec{f}(x,y,z) = 3x^2y^2\,\vec{i} + (x-y^2)\,\vec{j} - 3z^2\,\vec{k}$ را در نقطه $(-1,1,2)$ بیابید.

حل.

$$\nabla\vec{f} = 6xy^2\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} - 6z\,\vec{k}$$

$$div\vec{f} = 6xy^2 - 2y - 6z$$

پس:

$$div\, f(-1,1,2) = -6-2-12 = -20$$

۱۵- چرخه (کرل) تابع برداری $\vec{f}(x,y,z) = x^2y\,\vec{i} + 2xz^2\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$ را در نقطه $(1,1,1)$ بیابید.

حل.

$$curl\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2xz^2 & yz \end{vmatrix}$$

$$curl\,\vec{f} = (z-4xz)\,\vec{i} - (0-0)\,\vec{j} + (2z^2-x^2)\,\vec{k}$$

$$curl\,\vec{f}(1,1,1) = -3\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + \vec{k}$$

۱۶- چرخه (کرل) و واگرایی (دیورژانس) تابع برداری زیر را در نقطه $(1,-1,0)$ بیابید. و سپس پایستار بودن تابع را در آن نقطه بررسی کنید.

$$f(x,y,z) = 2x^2 yz\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + xyz^2\,\vec{k}$$

حل.

$$\nabla\vec{f} = 4xyz\,\vec{i} - z\,\vec{j} + 2xyz\,\vec{k}$$

$$div\vec{f} = 4xyz - z + 2xyz$$

$$div\, f(1,-1,0) = 0-0+0=0$$

$$curl\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4xyz & -z & 2xyz \end{vmatrix}$$

$$= (2xz+1)\,\vec{i} - (2yz-4xy)\,\vec{j} + (0-4xz)\,\vec{k}$$

$$curl\ \vec{f}(1,-1,0) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{O}$$

چون $curl\ \vec{f}(1,-1,0) = \vec{O}$ پس تابع برداری ذکر شده در نقطه $(1,-1,0)$ پایستار است.

تمرینات

۱- دامنه و برد توابع سه متغیره زیر را بیابید:

الف) $f(x,y,z)=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$

ب) $f(x,y,z)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}y+\tan^{-1}z$

ج) $f(x,y,z)=(x+y)\sqrt{z-2}$

۲- اگر $f(t)=\ln t$ و $g(x,y)=x^2+y$ باشند، مطلوب‌است ضابطه و دامنه تابع $h(x,y)=(fog)(x,y)$.

۳- اگر $f(x)=\sin^{-1}x$ و $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}$ باشند، مطلوب‌است ضابطه و دامنه تابع $h(x,y,z)=(fog)(x,y,z)$

۴- نقاط انفصال تابع $f(x,y)=\cos\dfrac{1}{xy}$ را بیابید.

۵- ناحیه پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & x^2+y^2\le 1 \\ 0 & x^2+y^2>1 \end{cases}$ را مشخص کنید.

۶- مقدار تابع $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ را در مبدای مختصات چنان بیابید تا تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۷- اگر $u=f(x,y)$ ، $x=F(r,s)$ ، $y=G(r,s)$ ، $f_{xy}=f_{yx}$ باشد ثابت کنید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=f_{xx}(Fr)^2+2f_{xy}F_r\,G_r+f_{yy}(G_r)^2+f_x\,F_{rr}+f_yG_{rr}$$

۸- اگر $u=e^{xy}$, $x=\cos t$, $y=\sin t$ آن‌گاه $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ را بیابید.

۹- با فرض این‌که $f(x,y,z)=x^2y+yz^2+z^3$ ، نشان دهید:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=3f(x,y,z)$$

۱۰- اگر $u=\sin\frac{r}{t}+\ln\frac{t}{r}$ ،نشان دهید: $t\frac{\partial u}{\partial t}+r\frac{\partial u}{\partial r}=0$

۱۱- اگر $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ثابت کنید $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$

۱۲- با فرض $u=x^2+y^2$ ، نشان دهید که تابع $z=xy+f(x^2+y^2)$ در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y^2-x^2$$

۱۳- نشان دهید که تابع $f(x,y)=\sinh x\sin y$ در معادله $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ صدق می‌کند.

۱۴- مطلوب‌است بیشترین مقدار مشتق جهتی تابع $f(x,y)=ye^{xy}+xy$ در نقطه $(0,2)$.

۱۵- تابع سه متغیره $f(x,y,z)=2z^3x^2-2y^2z-xy$ مفروض است. بردارگرادیان و میزان تغییرات تابع را در نقطه $(1,-1,1)$ در جهت بردار $-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ بیابید.

۱۶- معادلات متقارن خط مماس بر منحنی مشترک سطوح به معادلات $3x^2+2y^2+z^2=49$ و $x^2+2y^2-2z^2=0$ را در نقطه $(3,-3,2)$ بیابید.

۱۷- سیمی به طول L را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم.قطعه اول را به شکل یک مربع، قطعه دوم را به شکل یک دایره و قطعه سوم را به شکل یک مثلث متساوی‌الاضلاع خم می کنیم.روش بریدن سیم چگونه باشد تا مجموع مساحتهای مربع و دایره و مثلث یکبار ماکزیمم(بیشینه) و یکبار مینیمم(کمینه) شود.

۱۸- مقدار a را در تابع $f(x,y,z)=ax^2y^2z+ax^2+z^2$ چنان بیابید که تابع در نقطه (۱و ۰ و ۱) هارمونیک(همساز) باشد.

۱۹- نشان دهید که تابع نیروی زیر پایستار است و سپس تابع پتانسیل را در صورت وجود بیابید:

$$\vec{F}(x,y,z)=(2x\cos y-3)\vec{i}-(x^2\sin y+z^2)\vec{j}-(2yz-2)\vec{k}$$