۲- ریاضی عمومی

[illegible]

ریاضی پیش

فصل اول

مجموعه‌ها

تعریف: مجموعه دسته‌ای از اشیاء است به طوری که بتوان گفت یک شیء دلخواه متعلق به آن دسته است یا نه.

مثلاً $A=\{1,2,3,\dots\}$ و $B=\{a,b,c\}$. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین نشان می‌دهند.

تذکر: عضویت و عدم عضویت در مجموعه‌ها را با نماد $\in$ و $\notin$ نشان می‌دهند و به هر یک از عناصری که در مجموعه موجود باشد عضو آن مجموعه گویند. مثلاً در مجموعه $A=\{1,2,3\}$: $1\in A$ ولی $4\notin A$.

مجموعه تهی: مجموعه‌ای است که هیچ عضوی نداشته باشد و آن را با $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان می‌دهند.

زیرمجموعه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند A را زیرمجموعه B گویند هرگاه هر عضو A، عضو B نیز باشد. و آن را با نماد $A\subseteq B$ نشان می‌دهند.

$$\forall x\in A \to x\in B \Rightarrow A\subseteq B$$

تذکر: اگر عضوی در A باشد که در مجموعه B نباشد گوییم $A\nsubseteq B$.

$$\exists x\in A;\ x\notin B \Rightarrow A\nsubseteq B$$

مثال: اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{1,2,3,4,5\}$ و $C=\{1,3,6\}$ آنگاه $A\subseteq B$ و $C\nsubseteq B$، $C\nsubseteq A$ و $B\nsubseteq A$.

تذکر:

۱- مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

۲- هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.

تعریف: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n و تعداد زیرمجموعه های محض آن 2^n-1 است.

مثال: مجموعه $A=\{a,b\}$ دارای زیرمجموعه های زیر است. (۴ زیرمجموعه و ۳ زیرمجموعه محض)

ϕ , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$

$2^n=2^2=4$

$2^n-1=2^2-1=3$

تعریف: مجموعه ای که شامل همه زیرمجموعه های مجموعه A باشد را مجموعه توانی A گویند و با $P(A)$ نشان می دهند.

مثال: مجموعه توانی $A=\{a,b\}$ عبارت است از: $P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

انواع مجموعه ها: مجموعه ها در حالت کلی به دو دسته متناهی و نامتناهی تقسیم می شوند. مجموعه متناهی مجموعه ای است که تعداد اعضای آن محدود باشد. مانند $A=\{1,2,3,4\}$. و مجموعه نامتناهی مجموعه ای است که تعداد اعضای آن نامحدود باشد مثل $B=\{1,2,3,\dots\}$

دو مجموعه مساوی: دو مجموعه A و B را مساوی گویند هرگاه $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ باشد.

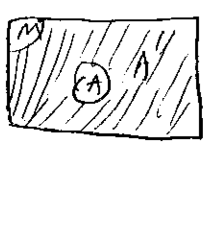
مثال: $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{3,2,1,1\}$ مساویند چون ترتیب و تکرار اعضا تأثیری در مجموعه ندارد.

دو مجموعه هم ارز: دو مجموعه A و B را هم ارز نامند هرگاه تعداد اعضای آنها برابر باشد و با $A\simeq B$ نشان داده می شود.

مثال: دو مجموعه $A=\{a,b\}$ و $B=\{1,2\}$ هم ارزند.

مجموعه مرجع: مجموعه ای است که شامل همه مجموعه ها باشد و آن را با M نشان می دهیم.

متمم یک مجموعه: اگر M مجموعه مرجع و A یک مجموعه باشد، متمم A را با A' یا A^c نشان می دهیم که مجموعه ای است شامل همه عناصر M به غیر از A.



مثال: اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $M=\{1,2,\dots,10\}$ آنگاه

$A'=\{6,7,\dots,10\}$

تذکر: همواره اگر A و B دو مجموعه دلخواه و M مجموعه مرجع باشد آنگاه داریم:

۱) $\phi' = M$ ۲) $M' = \phi$ ۳) $(A')' = A$

۴) $A = B \Rightarrow A' = B'$ ۵) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

اعمال بر مجموعه‌ها:

الف) اجتماع: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند اجتماع دو مجموعه A و B را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم که در آن $A \cup B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن یا عضو A یا عضو B باشد.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

مثال: اگر $A = \{1,2\}$ و $B = \{2,3,4,5\}$ آنگاه $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

ب) اشتراک: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند اشتراک دو مجموعه A و B را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم که در آن $A \cap B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن هم عضو A باشد و هم عضو B.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

مثال: اگر $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ و $C = \{4,5,6\}$ آنگاه:

$A \cap B = \{1,2,3\}$ و $A \cap C = \phi$ و $B \cap C = \{4,5\}$

ج) تفاضل: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، تفاضل دو مجموعه A و B را با $A - B$ نشان می‌دهیم که در آن $A - B$ مجموعه‌ای است شامل همه عناصر A که عضو B نباشند.

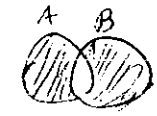
$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

مثال: اگر $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{3,4,5,6\}$ آنگاه $A - B = \{1,2\}$ و $B - A = \{6\}$

تذکر: در حالت کلی $A - B \neq B - A$

د) تفاضل متقارن: تفاضل متقارن دو مجموعه A و B را با $A \Delta B$ نشان می‌دهیم که در آن $A \Delta B$ مجموعه‌ای است که اعضای آن یا متعلق به $A - B$ است یا $B - A$ یعنی

$A \Delta B = \{x \mid x \in A - B \vee x \in B - A\}$



مثال: در مثال قبل $A \Delta B = \{1,2,6\}$

خواص مجموعه ها: اگر A و B و C سه مجموعه دلخواه و M مجموعه مرجع باشد آنگاه کلیه روابط زیر برقرار است:

١) $A \cup A = A$ ٢) $A \cup \phi = A$ ٣) $A \cup M = M$ ٤) $A \cup A' = M$

٥) $A \cap A = A$ ٦) $A \cap \phi = \phi$ ٧) $A \cap M = A$ ٨) $A \cap A' = \phi$

٩) $A - B = A \cap B'$ ١٠) $A - A' = A$ ١١) $A - M = \phi$ ١٢) $M - A = A'$

١٣) $A \subseteq B \to A \cup B = B$ ١٤) $A \subseteq B \to A \cap B = A$ ١٥) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ ١٦) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

١٧) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ قوانین دمورگان

١٨) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ١٩) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

٢٠) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ٢١) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

مجموعه های اعداد:

الف) مجموعه اعداد طبیعی $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

ب) مجموعه اعداد حسابی $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

ج) مجموعه اعداد صحیح $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

د) مجموعه اعداد گویا $Q = \{\frac{m}{n},\ m, n \in Z,\ n \neq 0\}$

ه) مجموعه اعداد گنگ $Q^c = R - Q$ $\{\pi, \sqrt{2}, \dots$

و) مجموعه اعداد حقیقی $R = Q \cup Q^c$

تذکر: همواره رابطه زیر بین مجموعه های اعداد برقرار است:

$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

فصل دوم

تابع

تعریف: حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B را با A×B نشان می‌دهیم که در آن

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$$

اعضای A×B به صورت دوتایی مرتب (x,y) که اصطلاحاً به آن زوج مرتب گویند است که در آن x را مولفه اول و y را مولفه دوم می‌نامند.

مثال: اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{3,4\}$ آنگاه

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$A^2=A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

تساوی دو زوج مرتب: دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) را مساوی گوییم هرگاه $a=c$ و $b=d$ باشد.

یا ~~[illegible]~~ باشد. مثال: اگر $(4, m+n) = (2m-n, 8)$ آنگاه m و n کدام است $m=4$ $n=4$

رابطه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند به هر زیرمجموعه A×B یک رابطه از A به B گفته می‌شود.

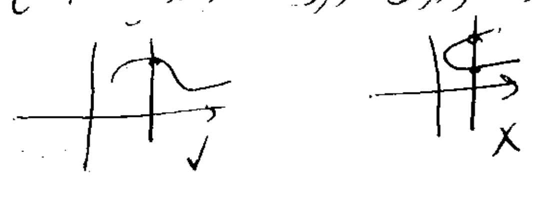
مثال: $A=\{a,b\}$ و $B=\{c,d\}$ آنگاه مجموعه $R=\{(a,c),(b,d)\}$ یک رابطه از A به B است.

تابع: تابع رابطه‌ای است که در آن هیچ دو زوج متمایز دارای x های مساوی نباشند. تابع را با f نشان می‌دهند و با نماد $f: A\longrightarrow B$ که در آن A و B دو مجموعه دلخواه می‌باشند. $\begin{cases}(x,y)\in f\\(x,z)\in f\end{cases}\rightarrow y=z$

مثال: رابطه $R=\{(1,2),(2,4),(3,4)\}$ یک تابع است ولی رابطه $R=\{(1,2),(1,3),(2,4)\}$

تابع نیست

تذکر: از روی شکل نمودار، را تابع گوییم هرگاه هر خط موازی محور y ها آنرا در یک نقطه قطع کند.



دامنه تابع: دامنه تابع f از A به B را با D_f نشان می‌دهیم که مجموعه‌ای است از تمامی مقادیری که x می‌تواند قبول کند

$$D_f=\{x \mid (x,y)\in f\}\subseteq A$$

برد تابع: برد تابع f از A به B را با نماد R_f نشان می‌دهیم که مجموعه‌ای است از تمامی مقادیری که y می‌تواند قبول کند

$$R_f=\{y \mid (x,y)\in f\}\subseteq B$$

مثال: در تابع $f=\{(1,2),(2,6),(4,-1),(5,3)\}$

$D_f=\{1,2,4,5\}$ و $R_f=\{-1,2,3,6\}$

تذکر: اگر تابع f از رابطه R که کل ضرب دکارتی $A\times B$ را شامل شد تشکیل گردد آنگاه $D_f=A$ و $R_f=B$

انواع توابع:

۱- **تابع چندجمله‌ای:** به تابعی که به صورت $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ باشد که در آن $n\in N$ و $a_i\in R$ $(0\le i\le n)$ و $a_n\neq 0$ باشد را تابع چندجمله‌ای از درجه n گویند.

مثال: تابع $f(x)=x^3+2x^2+x+1$ تابع از درجه ۳ و تابع $y=5x^5+4x-1$ از درجه ۵ می‌باشد.

تذکر: دامنه توابع چندجمله‌ای کلیه اعداد حقیقی است یعنی $D_f=\mathbb{R}$ و برد آن زیرمجموعه $\mathbb{R}$ است $R_f\subseteq\mathbb{R}$

۲- **توابع گویا (کسری):** توابعی‌اند به صورت $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابع چندجمله‌ای می‌باشند.

مثال: $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-9}$ و $g(x)=\frac{3x^5-1}{2x+4}$

تذکر: دامنه توابع گویا کلیه اعداد حقیقی غیر از نقاطی که مخرج را صفر کند می‌باشد مثلاً در مثال بالا

$D_f=\mathbb{R}-\{-3,3\} \leftarrow x^2-9=0 \rightarrow x=\pm 3$

$D_g=\mathbb{R}-\{-2\} \leftarrow 2x+4=0 \rightarrow x=-2$

مثال: دامنه $f(x)=\frac{\dots}{x^3+3x^2+x+3}$

$x^2(x+3)+(x+3)=0$

$(x+3)(x^2+1)=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$

$f(x)=x^2-x$

$y=x^2-x \rightarrow x^2-x-y=0$

$\rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$ ، $1+4y\ge 0$

برد: $f(x)=x^2-1$ ، $x^2\ge 0 \rightarrow x^2-1\ge -1$ ، $R_f=[-1,+\infty)$

۳- توابع رادیکالی: به تابعی که عبارت شامل متغیر زیر رادیکال باشد، تابع رادیکالی گویند.

مثال: تابع $f(x)=\sqrt{2x+5}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

تذکر: تابعی که فرجه رادیکال آن زوج باشد دامنه آن قسمتی از اعداد حقیقی است که زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

تابعی که فرجه رادیکال آن فرد باشد دامنه آن همان دامنه تابع زیر رادیکال است.

تعیین علامت: ۱) $P=ax+b$ ۲) $P=ax^2+bx+c$

مثال:

(۱) $f(x)=\sqrt{x-3} \to D_f=[3,+\infty)$ یا $D_f=\{x \mid x\in R, x\geq 3\}$

(۲) $g(x)=\sqrt[3]{x-3} \to D_g=D_{(x-3)}=\mathbb{R}$

(۳) $h(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$

تعیین علامت $\begin{cases} x\geq 0 \\ x-1>0 \end{cases}$

$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

(۴) $\sqrt{x^2+5x+6}$

(۵) $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

(۶) $\sqrt{x^3+4x^2+8x}$

(۷) $\sqrt{x^3+x^2-4x-4} \to x^2(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4)=(x+1)(x-2)(x+2)$

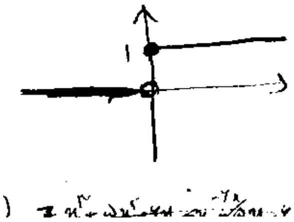
۴- توابع چند ضابطه‌ای: به توابعی که بیش از یک ضابطه داشته باشند توابع چند ضابطه‌ای گویند. دامنه این نوع توابع اجتماع دامنه کلیه ضابطه‌ها می‌باشد.

$f(x)=\begin{cases} g_1(x) & x\in D_1 \\ g_2(x) & x\in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ g_n(x) & x\in D_n \end{cases}$ $\quad D_f=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$

مثال: دامنه تعریف تابع $f(x)=\begin{cases} 3-x & x<1 \\ 1+x & 1\leq x\leq 4 \end{cases}$ را مشخص کنید.

$D_f=\{x \mid x\leq 1\}\cup\{x \mid 1\leq x\leq 4\}=(-\infty,1]\cup[1,4]=(-\infty,4]$

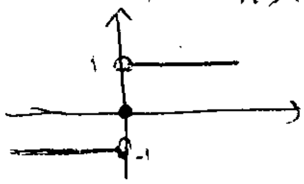
تابع پله‌ای واحد: این تابع را با $u(x)$ نشان می‌دهیم که در آن $u(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$



دامنه این تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد و $R_u=\{0,1\}$

$x^2(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4)$ ... $(x^2+5x+6)(x-1)$

۶- تابع ~~علامت~~: این تابع را با $sgn(x)$ نشان می‌دهیم که در آن $sgn(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$ و دامنه آن R می‌باشد و برد آن $R_{sgn}=\{-1,0,1\}$ است.



~~۷- تابع قدر مطلق: این تابع را با $f(x)=|x|$ نشان می‌دهیم که در آن~~ $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$

~~دامنه آن R می‌باشد~~

تذکر: برد تابع پله‌ای واحد $\{0,1\}$ و برد تابع علامت $\{-1,0,1\}$ ~~...~~

تساوی دو تابع: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را مساوی گوئیم هرگاه $D_f=D_g$ و به ازای هر x متعلق به دامنه $f(x)=g(x)$ باشد.

مثال: دو تابع $f(x)=x+1$ و $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ برابر نیستند چون

$D_f=R$

$D_g=R-\{1\}$

$f(x)=\sqrt{x^2+5x+4}$, $g(x)=\frac{x^2+5x+4}{\sqrt{x^2+5x+4}}$

اعمال ~~روی~~ توابع: اگر f و g دو تابع باشند آنگاه:

1) $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$, $D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$

2) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\frac{2}{x-3}$ مطلوبست $D_{f\pm g}$: $[1,3)\cup(3,+\infty)$; $x\geq 1$, $x\neq 3$

تذکر: با توجه به روابط فوق نتیجه می‌شود که:

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+1}$, $g(x)=\sqrt{x+8}$

4) $(kf)(x)=k\,f(x)$, $k\in R$ $\longrightarrow D_{kf}=D_f$

5) $(f)^n(x)=f(x)\cdot f(x)\cdots f(x)$ $\rightarrow D_{f^n}=D_f$

$(x-5)(x-2)=0$, $x=2$, $x=5$

$(-\infty,2]\cup(5,+\infty)$

$f(x)=\sqrt{x-1}$ ... $x\geq 2$

9

ترکیب توابع: ترکیب دو تابع f و g را با fog نشان می‌دهیم و در آن $fog(x)=f(g(x))$.

دامنه تابع $fog(x)$ عبارت است از $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ (مهم)

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

مثال: دو تابع $f(x)=x^4$ و $g(x)=\sqrt[4]{x}$ مفروضند. حاصل $fog(x)$، $gof(x)$ را به همراه دامنه بیابید.

$D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=[0,+\infty)$

$fog(x)=f(g(x))=(\sqrt[4]{x})^4=x$

$\times\ D_{fog}(x)=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[0,\infty) \mid \sqrt[4]{x}\in \mathbb{R}\}=[0,+\infty)$

$gof(x)=g(f(x))=\sqrt[4]{x^4}=x$

$\times\ D_{gof}(x)=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in \mathbb{R} \mid x^4\in[0,+\infty)\}=\mathbb{R}$

تذکر:

۱- در حالت کلی $fog\neq gof$ می‌باشد مثلا $f(x)=x^3$ و $g(x)=\frac{2}{x}$

$\rightarrow fog(x)=f(g(x))=\left(\frac{2}{x}\right)^3=\frac{8}{x^3} \Rightarrow fog(x)\neq gof(x)$

$gof(x)=g(f(x))=\frac{2}{x^3}$

$f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$

$(x+\frac{1}{x})^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3x^2(\frac{1}{x})+3x(\frac{1}{x^2})$

$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

$\boxed{\text{تمرین ۱:}}$ از رابطه $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ ضابطه $f(x)$ را بیابید و $f\circ f(x)$ را بیابید.

$f(t)=t^2-2$

حل: $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \rightarrow f(x)=x^2-2$

$f\circ f(x)=(x^2-2)^2-2=x^4-4x^2+2$

$\boxed{\text{تمرین ۲:}}$ اگر $y=f(x)$ تابع خطی گذرنده از نقاط $(0,a)$ و $(a,0)$ باشد، ضابطه $(f\circ f)(x)$ را به دست آورید.

$\boxed{\text{تمرین: اگر } f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2} \text{ و } g(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3} \text{ آنگاه مطلوب است ضابطه } fog(x)}$

حل: $A\,|\,{}^{0}_{a}$ $\quad B\,|\,{}^{a}_{0}$

$y-a=\frac{0-a}{a-0}(x-0) \rightarrow y=-x+a$

$f(x)=-x+a \rightarrow f(f(x))=-(-x+a)+a=x$

$f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$

$(x+\frac{1}{x})^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3x\ldots$

$f(x+\frac{1}{x})=x^3+3(x+\frac{1}{x})$

۱۰) اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\frac{1}{x+1}$ باشد نشان دهید $f\circ g(x)\neq g\circ f(x)$

حل:

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\frac{\frac{1}{x+1}+1}{\frac{1}{x+1}-1}=\frac{\frac{1+x+1}{x+1}}{\frac{1-x-1}{x+1}}=\frac{\frac{x+2}{x+1}}{\frac{-x}{x+1}}=\frac{x+2}{\cancel{x+1}}\times\frac{\cancel{x+1}}{-x}=-\frac{x+2}{x}$$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}+1}=\frac{1}{\frac{x+1+x-1}{x-1}}=\frac{1}{\frac{2x}{x-1}}=\frac{x-1}{2x}\neq f\circ g(x)$$

توابع ~~[illegible]~~ – هایپربولیک

تعریف زوج و فرد: تابع $f(x)$ را زوج گوئیم هرگاه به ازای هر x متعلق به دامنه f اولاً $-x$ متعلق به دامنه f باشد (دامنه f متقارن باشد) و ثانیاً $f(-x)=f(x)$

مثال: تابع $f(x)=x^2+8$ زوج است:

$$f(-x)=(-x)^2+8=x^2+8=f(x)$$

تابع $f(x)$ را فرد گوئیم هرگاه $f(-x)=-f(x)$

مثال: تابع $f(x)=x^3+2x$ فرد است:

$$f(-x)=(-x)^3+(-2x)=-x^3-2x=-(x^3+2x)=-f(x)$$

نکته: ممکن است که یک تابع نه فرد باشد و نه زوج

مثال: ۱) تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ نه فرد و نه زوج است چون $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ (چون $-1\in D_f$ اما باید قرینه آن یعنی ۱ هم عضو D_f باشد که چنین نیست. (یعنی دامنه آن متقارن نیست)

۲) تابع $f(x)=x^2+x$ اگر چه دامنه متقارن دارد ولی $f(x)\neq f(-x)$ و $f(x)\neq -f(x)$

یعنی نه فرد است و نه زوج

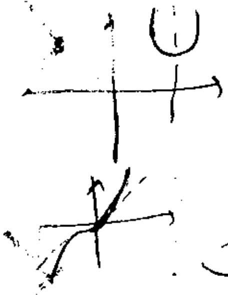
$$f(-x)=x^2-x\neq f(x)$$
$$\neq -f(x)$$

جزء صحیح زوج:

$\forall a\in\mathbb{R}\quad f(a)=[a-[a]]=$

$f(x)=[x-[x]]=0$

~~[illegible]~~



~~تمرین~~

۱- اگر تابع $f(x)$ زوج باشد محور yها محور تقارن نمودار تابع f است.

۲- اگر تابع $f(x)$ فرد باشد مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار تابع f است.

۳- مجموع و تفاضل دو تابع زوج، تابعی زوج و مجموع و تفاضل دو تابع فرد، تابعی فرد است.

۴- حاصلضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج، تابعی فرد است.

۵- حاصلضرب دو تابع زوج تابعی زوج و حاصلضرب دو تابع فرد، تابعی زوج است.

۶- اگر g تابعی فرد و f تابعی زوج باشد آنگاه $f\circ g$ و $g\circ f$ توابعی زوجند.

۷- ترکیب دو تابع فرد، تابع فرد است. و ترکیب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

مثال ۴: نشان دهید که تابع $f(x)=\cos(\sin x)+\sin(\cos x)$ زوج است.

حل:
$$f(-x)=\cos(\sin(-x))+\sin(\cos(-x))=\cos(-\sin x)+\sin(\cos x)$$
$$=\cos(\sin x)+\sin(\cos x)=f(x)$$

مثال ۵: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=|x+2|+a|x-2|$ زوج است؟

حل:
$$f(x)=f(-x)\rightarrow |x+2|+a|x-2|=|-x+2|+a|-x-2|$$
$$\rightarrow |x+2|+a|x-2|=|x-2|+a|x+2| \rightarrow |x+2|+a|x-2|-|x-2|-a|x+2|=0$$
$$\rightarrow (a-1)|x-2|-(a-1)|x+2|=0 \rightarrow (a-1)\left(|x-2|-|x+2|\right)=0 \rightarrow a-1=0 \rightarrow a$$

تابع پوشا و تابع یک به یک

تعریف: تابع $f:A\rightarrow B$ را پوشا گوئیم هرگاه به ازای هر b متعلق به B وجود داشته باشد a متعلق به A به طوری که $f(a)=b$ باشد. به عبارت دیگر $R_f=B$ باشد.

مثال: تابع $f(x)=x^3$ $f:R\to R$ پوشاست چون بازای هر مقدار f یک x یافت می‌شود ولی
تابع $f(x)=x^2$ $f:R\to R$ پوشا نیست چون بازای هر مقدار f یک x وجود ندارد مثلا $f(x)=-1$
$\to x^2=-1 \to x$ ✗

تمرین ۶: نشان دهید تابع $f:R\to R$ با ضابطه $f(x)=|x|$ پوشا نیست ولی تابع
$f:[0,1]\to[0,1]$ با ضابطه $f(x)=|x|$ پوشاست؟

حل: تابع اول پوشا نیست چون اگر $f(x)=-1$ باشد آنگاه $|x|=-1$ که تناقض است

ولی تابع دوم پوشاست چون بازای هر $x\in[0,1]$ آنگاه $f(x)=y$ می‌شود

(یا برای $\sqrt{x}$ هم به همین صورت) $R_f=R^+$

تعریف: تابع $f(x)$ را یک به یک گوییم هرگاه بازای هر $x_1,x_2\in D_f$ داشته باشیم:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

مثال: ۱) تابع $f(x)=x+3$ یک به یک است:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+\cancel{3}=x_2+\cancel{3}\Rightarrow x_1=x_2$$

۲) تابع $f(x)=x^2-4$ یک به یک نیست:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2-\cancel{4}=x_2^2-\cancel{4}\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

تمرین ۷: نشان دهید تابع $f(x)=x^3+x$ یک به یک است؟

حل: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^3+x_1=x_2^3+x_2 \to x_1^3+x_1-x_2^3-x_2=0$

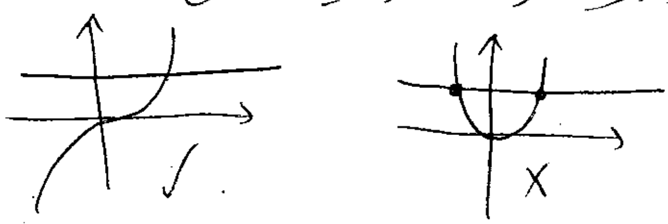
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\to (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+(x_1-x_2)=0$

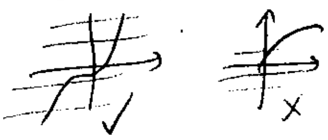
$\to (x_1-x_2)(\underbrace{x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1}_{\neq 0})=0 \quad \to x_1-x_2=0 \to x_1=x_2$

۱۳

نکته: از روی نمودار، تابعی یک به یک است که خطوط موازی محور x ها آن را در یک نقطه قطع کنند



و تابعی پوشاست که هر خط موازی محور x ها آن را قطع کند.



تابع صعودی و نزولی:

تعریف: تابع $f(x)$ را صعودی گویند هرگاه $\forall x_1,x_2 \in D_f ;\ x_1<x_2 \to f(x_1)\leq f(x_2)$

و تابع $f(x)$ را اکیداً صعودی گویند هرگاه $\forall x_1,x_2 \in D_f ;\ x_1<x_2 \to f(x_1)<f(x_2)$

تعریف: تابع $f(x)$ را نزولی گویند هرگاه $\forall x_1,x_2 \in D_f ,\ x_1<x_2 \longrightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$

و تابع $f(x)$ را اکیداً نزولی گویند هرگاه $\forall x_1,x_2 \in D_f ,\ x_1<x_2 \longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

مثال: نشان دهید تابع $f(x)=x^2+5x$ در بازه $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است؟

$$x_1<x_2 \rightarrow \begin{cases} x_1^2<x_2^2 \\ 5x_1<5x_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} x_1^2+5x_1<x_2^2+5x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

یعنی اکیداً صعودی است.

تذکر: هر تابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی به ترتیب صعودی و نزولی اند ولی عکس آن صحیح نیست.

مثال: نشان دهید هر تابع اکیداً صعودی، یک به یک است؟

اگر f اکیداً صعودی باشد آنگاه: $\forall x_1,x_2 \in D_f \quad x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

یا به عبارت دیگر $x_1\neq x_2 \Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

$\xrightarrow{\text{نقیض گزاره}}$ $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ پس یک به یک است.

$\sim p \Rightarrow \sim q \rightarrow q \Rightarrow p$

تابع معکوس: اگر تابع $f: A \longrightarrow B$ یک به یک باشد معکوس تابع f را با f^{-1} نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^{-1}=\{(y,x) \mid (x,y)\in f\}$$

تذکر: ۱) اگر $f: A \to B$ آنگاه $f^{-1}: B \to A$ می‌شود و $D_f = R_{f^{-1}}$ ، $R_f = D_{f^{-1}}$

۲) اگر f و g معکوس‌پذیر باشند آنگاه $(fog)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$

۳) دو تابع f و g معکوس همند اگر و فقط اگر $fog(x) = gof(x) = x$

۴) هر تابع یک به یک معکوس‌پذیر است چون اگر تابع یک به یک نباشد معکوس آن تابع نمی‌شود

مثال: تابع معکوس $f = \{(1,2),(2,3)\}$ به صورت $f^{-1} = \{(2,1),(3,2)\}$ است و

$D_f = \{1,2\} = R_{f^{-1}}$ و $R_f = \{2,3\} = D_{f^{-1}}$

تعیین ~~ضابطه~~ تابع معکوس: ابتدا جای x و y را تعویض و y را برحسب x می‌نویسیم سپس به جای y مقدار $f^{-1}(x)$ قرار می‌دهیم

$y = f(x) \to x = f^{-1}(y)$

مثال: ضابطه معکوس تابع $y = x - 2$ را بیابید.

$y = x-2 \to x = y+2 \to y = x+2 \to f^{-1}(x) = x+2$

$fog(x) = gof(x) = x$ امتحان درست بوده معکوس   ۲) $y = x^3 + 8$

$\boxed{\text{~~تمرین~~ ۸}}$: ضابطه تابع معکوس $g(x) = \frac{5x-1}{1-4x}$ را بیابید

حل:

$x = \frac{5y-1}{1-4y} \to x(1-4y) = 5y-1 \to x - 4xy - 5y + 1 = 0$

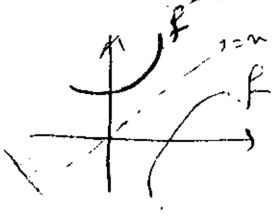
$\to y(-4x-5) + x + 1 = 0 \to y(-4x-5) = -x-1 \to y = \frac{x+1}{4x+5}$

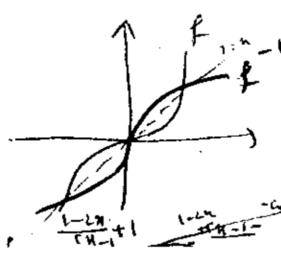
$\to g^{-1}(x) = \frac{x+1}{4x+5}$

fog: $\frac{5(\frac{x+1}{4x+5})-1}{1-4(\frac{x+1}{4x+5})} = \frac{\frac{5x+5-4x-5}{4x+5}}{\frac{4x+5-4x-4}{4x+5}} = x$

مثال: نشان دهید دو تابع $f(x) = x^3 + 6$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-6}$ معکوس همند $fog = x$

نمودار ~~تابع~~ معکوس: برای رسم نمودار تابع معکوس $f(x)$ کافی است قرینه آن را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) بیابیم.





$f(x) = \frac{x^2+x}{2+...}$

$y(\ldots) = 1 - 4x \to y = \frac{1-4x}{2x-1}$

تذکر:

۱- اگر نقطه (x,y) روی نمودار f باشد، نقطه (y,x) روی نمودار f^{-1} است.

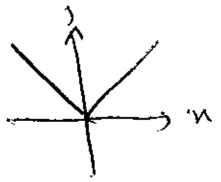
۲- اگر f تابعی صعودی باشد آنگاه f^{-1} نیز صعودی و اگر f نزولی باشد f^{-1} نیز نزولی است.

۳- اگر f و f^{-1} متقاطع باشند نقطه برخوردشان روی خط $y=x$ است.

۱- قدر مطلق و خواص آن:

۲- تابع قدر مطلق و رسم آن: تابعی که در آن ضابطه قدر مطلق بکار رفته باشد را تابع قدر مطلق گویند که ساده‌ترین آن به صورت $y=|x|$ می‌باشد که در آن

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

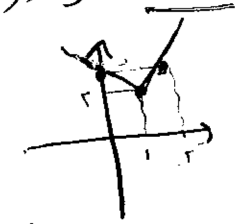


تذکر: دامنه تابع $|x|$ کل اعداد حقیقی و برد آن $[0$ یا $\mathbb{R}^+$ می‌باشد.

تذکر: برای رسم نمودار تابع قدر مطلق اگر از ساده کردن ضابطه نتیجه‌ای به دست نیاید برای نقاط بیشتر از روش نقطه‌یابی کمک گرفت

مثال: نمودار تابع $y=|x-1|+2$ را رسم کنید.

$$y = \begin{cases} (x-1)+2 & x-1 \geq 0 \\ -(x-1)+2 & x-1 < 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ -x+3 & x < 1 \end{cases}$$



یا از طریق نقطه‌یابی

$\boxed{\text{تمرین ۹:}}$ نمودار $|x|+|y|=1$ را رسم کنید.

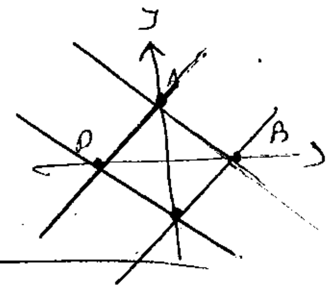
حل:

$x \geq 0 , y \geq 0 \rightarrow x+y=1 \rightarrow y=1-x \quad A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

$x \leq 0 , y \geq 0 \rightarrow -x+y=1 \rightarrow y=1+x \quad C\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \quad D\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$

$x \leq 0 , y \leq 0 \rightarrow -x-y=1 \rightarrow y=-x-1 \quad E\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. \quad F\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$

$x \geq 0 , y \leq 0 \rightarrow x-y=1 \rightarrow y=x-1 \quad G\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. \quad H\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$



خواص قدر مطلق:

۰) $|-x|=|x|$

۱) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

۲) $|xy|=|x||y|$

۳) $|x+y| \leq |x|+|y|$

۴) $|x+y| \geq |x|-|y|$

۵) $|x| \geq a \rightarrow x \geq a$ ...

۶) $|x|<a \rightarrow -a<x<a$

۱۶

(کران دار)

~~تابع کراندار~~

کران بالا: گوئیم تابع $f: A \to B$ از بالا کراندار است هرگاه $\exists M ;\ \forall x \in A \quad f(x) \leq M$
و M را کران بالای تابع f گوئیم.

کران پائین: گوئیم تابع $f: A \to B$ از پائین کراندار است هرگاه $\exists L ;\ \forall x \in A \quad f(x) \geq L$
و L را کران پائین تابع f گوئیم.

تعریف: تابع $f: A \to B$ کران دار است هرگاه کران بالا و کران پائین داشته باشد

$$\exists L, M ;\ \forall x \in A \quad L \leq f(x) \leq M$$

مثال: تابع $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ به ازای هر $x \in [-6, 6]$ کراندار است چون به ازای هر $x \in D_f$

$36 - x^2 \geq 0$ و چون $x^2 \geq 0$ پس $36 - x^2 \leq 36$ یعنی $0 \leq 36 - x^2 \leq 36$. پس $0 \leq \sqrt{36 - x^2} \leq 6$

یعنی $0 \leq f(x) \leq 6$ می باشد.

$0 =$ کران پائین

$6 =$ کران بالا

تابع جزء صحیح: جزء صحیح عدد حقیقی x را با $[x]$ نشان می دهند که عبارتست از نزدیکترین عدد صحیح سمت چپ x یعنی اگر $n \leq x < n+1$ آنگاه $[x] = n$.

مثال: $[3.2] = 3$, $[1.99] = 1$, $[-2.1] = -3$, $[2] = 2$

خواص جزء صحیح:

1) $[x] \leq x < [x] + 1$

2) $0 \leq x - [x] < 1$

3) $[x - [x]] = 0$

4) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$

5) $[x + n] = [x] + n \quad n \in Z$

6) $[[x] - x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$