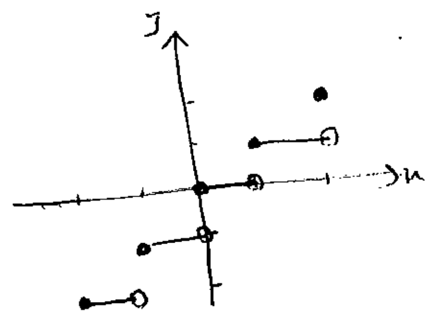
رسم تابع $[x]$: برای سهولت در رسم تابع را در فاصله $[-2,2]$ رسم می‌کنیم:



$-2 \le x < -1 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = -2$

$-1 \le x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -1$

$0 \le x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 0$

$1 \le x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 1$

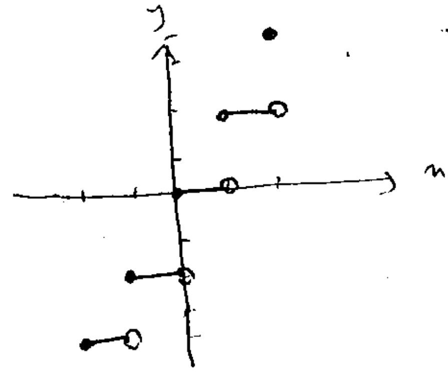
$x \ge 2 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow y = 2$

تذکر: ۱) دامنه تابع $[x]$ مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد صحیح است.

۲) تابع $[x]$ یک به یک نیست.

تمرین ۱۰: فرق توابع $[2x]$ و $2[x]$ را با رسم شکل نشان دهید.

حل:



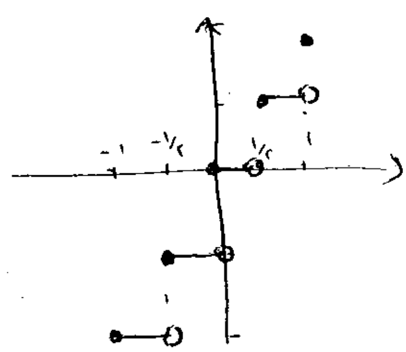
$2[x]$: $-2 \le x < -1 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = 2[x] = -4$

$-1 \le x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -2$

$0 \le x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 0$

$1 \le x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 2$

$x = 2 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow y = 4$



$[2x]$ $-2 \le 2x < -1 \rightarrow -1 \le x < -\frac{1}{2} \rightarrow y = [2x] = -2$

$-1 \le 2x < 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \le x < 0 \rightarrow y = [2x] = -1$

$0 \le 2x < 1 \rightarrow 0 \le x < \frac{1}{2} \rightarrow y = [2x] = 0$

$1 \le 2x < 2 \rightarrow \frac{1}{2} \le x < 1 \rightarrow y = [2x] = 1$

$2 \le 2x < 3 \rightarrow 1 \le x < \frac{3}{2} \rightarrow y = [2x] = 2$

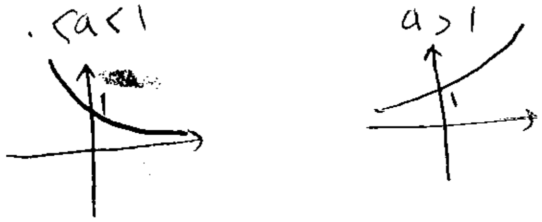
مثال: مقدار $\left|[7x] - |[5x]|\right|$ به ازای $x=-\frac{1}{2}$ را بیابید.

$$\left|[-\tfrac{7}{2}] - |[-\tfrac{5}{2}]|\right| = \left|-4-|-3|\right| = |-4-3| = 7$$

تابع مثلثاتی از روی کتاب خوانده شود. [illegible]

تابع نمایی: به تابع $f(x)=a^x$ که در آن $a>0$ و $a\neq 1$ تابع نمایی گویند. دامنه آن $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{R}^+$ می‌باشد.

نمودار تابع نمایی: در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:



مثال: جواب معادله نمایی $2^{2x}+3\times 2^x-4=0$ را بیابید.

$$2^x=t \to 2^{2x}=(2^x)^2=t^2$$

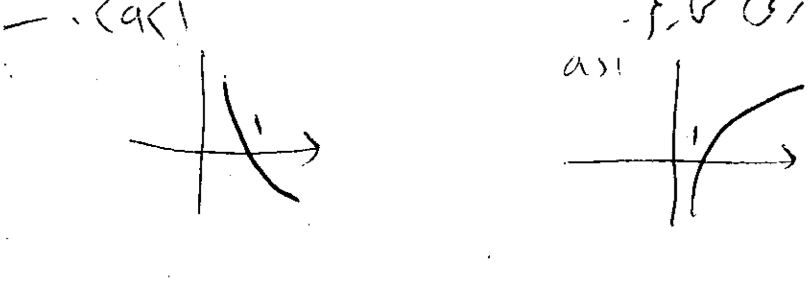
$$t^2+3t-4=0 \to (t+4)(t-1)=0 \to \begin{cases} t=-4 \to 2^x=-4 \quad \times \\ t=1 \to 2^x=1 \Rightarrow 2^0 \to \boxed{x=0} \end{cases}$$

تابع لگاریتمی: تابع معکوس تابع نمایی $f(x)=a^x$ را تابع لگاریتمی در مبنای a نامیده و به صورت $f^{-1}(x)=\log_a x$ نشان می‌دهیم که در آن

$$x=a^y \Leftrightarrow \log_a x=y$$

مثال: $\log_3 9=x \to 9=3^x \to 3^2=3^x \to x=2$ و $2^3=8 \to \log_2 8=3$

نمودار تابع لگاریتم: در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:



خواص ~~لگاریتم~~:

$1)\ \log_a^a = 1$ $\quad$ $2)\ \log_a^1 = 0$ $\quad$ $3)\ \log ab = \log a + \log b$

$4)\ \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad a,b>0$ $\quad$ $5)\ \log a^n = n\log a \quad a>0$

$6)\ \log_b^a = \frac{\log a}{\log b} \quad a,b>0$ $\quad$ $7)\ \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a \quad a,b>0,\ b\neq 1$

$8)\ \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

تذکر: برای تعیین دامنه تابع لگاریتمی $y = \log_{g(x)}^{f(x)}$ باید

$D_f = \{x \mid f(x)>0 ,\ g(x)>0 ,\ g(x)\neq 1\}$

$1)\ \log_{10-x}^{x-2}$ $\quad$ $x-2>0$، $10-x>0$، $10-x\neq 1 \to x\neq 9$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \log_5 \frac{x+1}{x-1}$ را بیابید.

$D_f = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$		$-$		$+$

تعیین علامت

$2)\ \log_{7-x}^{x-2}$ $\quad$ $\begin{cases} x-2>0 \to x>2 \\ 7-x>0 \to x<7 \\ 7-x\neq 1 \to x\neq 6 \\ (2,6)\cup(6,7) \end{cases}$

تمرین ۱: دامنه تابع $y = \sqrt{\log(x-2)}$ را بیابید.

حل:

$\begin{cases} \log(x-2) \geq 0 \to \log(x-2) \geq \log 1 \to x-2 \geq 1 \to x \geq 3 \\ x-2>0 \to x>2 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 3$

مثال: جواب معادله لگاریتمی $1 + 3\log_{10}^{x} = 4$ را بیابید.

$3\log_{10}^{x} = 3 \to \log_{10}^{x} = 1 \to x = 10^1 = 10$

توابع هایپربولیک و معکوس آن

فصل سوم
حد و پیوستگی

حد چپ: فرض کنید f تابعی در بازه (a, x_0) باشد عدد L را حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه x_0 گویند اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به L نزدیک کرد به شرط آنکه عدد مثبت x_0-x به اندازه کافی به صفر نزدیک شود یعنی

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

مثال: $\lim_{x\to 2^-}[x] = 1$ در مثال اگر $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<1\\ x+1 & x\geq 1\end{cases}$ (1) آنگاه $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0$

حد راست: مانند حد چپ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ بازه (x_0, b) و $x-x_0$

مثال: در مثال (1) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x+1=2$ و $\lim_{x\to 2^+}[x]=2$

تذکر: هرگاه تابع $f(x)$ در بازه (a,b) دارای حد است اگر حد چپ و راست موجود و هم برابر باشند یعنی

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

مثال: اگر $f(x)=2x^2+4$ آنگاه: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\times 1^2+4=6$

قضایای حد:

۱- حد تابع ثابت $f(x)=C$ وقتی $x\to x_0$ برابر C است. مثلاً $\lim_{x\to \frac{3}{2}} 5 = 5$

۲- حد تابع $f(x)=x$ وقتی $x\to x_0$ برابر x_0 است. مثلاً $\lim_{x\to 2} x = 2$

۳- حد تابع $f(x)=ax+b$ وقتی $x\to x_0$ برابر ax_0+b است. مثلاً $\lim_{x\to \frac{1}{3}} 3x+2 = 3\times\frac{1}{3}+2=3$

۴- اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=L_2$ آنگاه:

الف) $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim f(x)\cdot g(x) = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$ [illegible]

مثال: [illegible]

۲۱

ح) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2 \neq 0}$

~~تعریف ریاضی حد، حد چپ، حد راست، حد بینهایت، حد در بینهایت با مثال~~

د) $\lim_{x\to x_0} (k f(x)) = k \lim_{x\to x_0} f(x) = kL_1$

مثال: حد تابع $f(x)= x^2-[x]$ در نقطه $x\to 0^-$ را بیابید.

$$\lim_{x\to 0^-} x^2-[x] = 0^2-[0^-] = 0-(-1)=1$$

(نشان دهید که تابع در نقطه $x=0$ حد ندارد) ~~$\lim_{x\to 0^+} x^2-[x] = 0-[0^+]=0 \quad 1\neq 0$~~

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ موجود نیست.

$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$ که حد ندارد

تمرین ۱۲: حد چپ تابع $f(x)=|x|+\left[x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ در نقطه $x=3$ را بیابید.

حل: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3+\left[3^-+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 3+3=6$

تمرین ۱۳: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)= a[x]+[x+1]$ در نقطه $x=1$ حد دارد؟

حل: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = a\times 0+1=1 \rightarrow a+2=1 \rightarrow a=-1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a+2$

$f(x)=\frac{|x|+3}{3-[x]} \quad , x=-2$

حد بینهایت: وقتی $x\to a$ اگر حد صورت غیر صفر و حد مخرج صفر شود آنگاه مقدار حد بینهایت می‌شود. مثلاً

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = +\infty$$

حد در بینهایت: حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to\infty$ میل کند را حد در بینهایت گویند. در این حالت رفتار تابع حد در بینهایت را تعیین می‌کند. مثلاً

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$ و $\lim_{x\to\infty} \sin x =$ موجود نیست

روش حدگیری از کسرهایی که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای است: (در حد بی‌نهایت)

برای این کار درجه بزرگترین عبارت را از صورت و مخرج در نظر می‌گیریم:

۱- اگر درجه صورت کمتر از درجه مخرج باشد، حد صفر است.

۲- اگر درجه صورت بیشتر از مخرج باشد، حد بی‌نهایت است.

۳- اگر درجه صورت و مخرج برابر باشد، حد برابر ضریب بزرگترین درجه هاست.

مثال:

$$1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+4}{2x^5+x^4-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+4x^3+2x}{x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x-1}}{3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{تمرین ۱۴}}$ مقدار حد $\frac{(x^2-1)^2-x^4+2x^3+1}{x^3-x+1}$ وقتی $x\to+\infty$ را بیابید؟

حل:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^4}-2x^2+1-\cancel{x^4}+2x^3+1}{x^3-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

[redacted]

قضیه فشردگی: اگر $h(x) \le f(x) \le g(x)$ و $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$ آنگاه $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

مثال: اگر $3-x^2 \le f(x) \le 3+x^2$ باشد آنگاه $\lim_{x\to 0} f(x)$ را بیابید؟

$$\lim_{x\to 0} 3-x^2 = 3\ ,\quad \lim_{x\to 0} 3+x^2 = 3 \ \longrightarrow\ \lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

مثال: اگر $2x-5 \le f(x) \le 3x+5$ آنگاه $\lim_{x\to 1} f(x)$ را بیابید.

قانون هم‌ارزی: اگر x بر حسب رادیان باشد آنگاه $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

تذکر: طبق قانون هم‌ارزی داریم:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\times 1 = 1$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2\times 1 = 2$ و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x} = m$

حل کنید: $\lim\frac{1-\cos x+\sin x}{x^2}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 2\times(1)^2 = 2$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\times\frac{ax}{bx}\times\frac{bx}{\sin bx} = 1\times\frac{a}{b}\times 1 = \frac{a}{b}$

رفع ابهام از صورت‌های مبهم: اگر حاصل حد یکی از حالت‌های $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\infty-\infty$ باشد گوئیم حد مبهم است و باید رفع ابهام شود. حال چگونگی رفع ابهام را توضیح می‌دهیم:

رفع ابهام $\frac{0}{0}$: برای این نوع رفع ابهام داریم:

مثال:

1) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{\sqrt{x-3}}$ (مبهم $\frac{0}{0}$) $= \lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{\sqrt{x-3}}\times\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3} = 0$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}x+2 = 4$

3) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x\to 4}\sqrt{x}+2 = 4$

رفع ابهام $\infty-\infty$:

مثال: 1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1} = 1$ مبهم $\infty-\infty$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty}$ مبهم $\infty-\infty$

مجانب قائم: تابع f در نقطه $x=a$ دارای مجانب قائم است هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ یا $-\infty$ 2) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ یا $-\infty$ 3) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ یا $-\infty$

مثال: 1) مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{4}{x-3}$ خط $x=3$ است چون $\lim_{x\to 3}\frac{4}{x-3}=+\infty$

2) مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{4x-3}{x^2-4}$ را بیابید؟

$x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$ مجانب قائم $f(2), f(-2) \neq \frac{0}{0}$

$\boxed{\text{تمرین ۱۵}}$ مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$ را بیابید.

$\boxed{\text{حل:}}$ $x^2-3x+2=0 \rightarrow (x-2)(x-1)=0 \rightarrow x=2,\ \cancel{x=1} \rightarrow$ غ ق ق

$f(1)=\frac{1-2+1}{\dots}=\frac{0}{0}$

مجانب افقی: خط $y=L$ را مجانب افقی تابع $f(x)$ گویند هرگاه $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

مثال: مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{6x+5}{2x-1}$ را بیابید؟

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+5}{2x-1}=\frac{6}{2}=3 \rightarrow y=3$ مجانب افقی

تمرین ۱۶: مجانب‌های افقی تابع $f(x)=\frac{2x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{4x^2-1}}$ را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{|2x|}=\pm1 \to y=\pm1$$ مجانب افقی

$$4x^2-1=0 \to x=\pm\tfrac{1}{2}$$ مجانب قائم

مجانب مایل: برای یافتن مجانب مایل تابع کسری که درجه صورت آن یک واحد بیشتر از درجه مخرج می‌باشد، کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، حاصل مجانب مایل است.

مثال: مجانب مایل تابع $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2-1}$ برابر است با:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x & x^2-1 \\ \hline -x^3\mp x & x \\ 2x & \end{array}$$

مجانب مایل $\quad y=x$

تمرین ۱۷: مجانب مایل تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{x-1}$ را بیابید؟

حل:

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+1 & x-1 \\ \hline -x^2\pm x & x-3 \\ -3x+1 & \\ \mp 3x\pm 3 & \\ -2 & \end{array}$$

$\longrightarrow y=x-3$

یادآوری: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn+c}\right)^{dn+f}=e^{\frac{ad}{b}}$$

۲۹

پیوستگی:

الف) پیوستگی تابع در یک نقطه: تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد

۱) $f(a)$ معلوم باشد

۲) $\lim_{x\to a} f(x)$ معلوم باشد

۳) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ باشد

تذکر: اگر یکی از سه شرط فوق برقرار نباشد گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ ناپیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=2x^2-5$ در نقطه $x=2$ پیوسته است:

$f(2)=2\times2^2-5=3$

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} 2x^2-5=3 \longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

۲) $f(x)=x^2-2x+1$ ...

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax+3 & x<2 \\ 4 & x=2 \\ x-2b & x>2 \end{cases}$ پیوسته باشد در نقطه $x=2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax+3) = 2a+3 = 4 \to a=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x-2b) = 2-2b = 4 \to b=-1$$

ب) پیوستگی راست و چپ:

اگر حد راست تابع در نقطه $x=a$ با $f(a)$ برابر باشد گوییم تابع در $x=a$ پیوستگی راست دارد

و اگر فقط حد چپ ... چپ دارد.

مثال: پیوستگی چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x<1 \\ 2 & x=1 \\ 4-x & x>1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3\times 1-1 = 2 = f(1)$$

پیوستگی چپ دارد

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4-1 = 3 \neq f(1)$$

$\boxed{\text{تمرین ۱}}$: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax-1 & x<1 \\ x+1 & 1\le x\le 4 \\ bx+2 & x>4 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوستگی چپ و در نقطه $x=4$ پیوستگی راست داشته باشد.

حل:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \to \lim_{x\to 1^-} ax-1 = a-1 \text{ و } f(1)=1+1=2 \to a-1=2 \to a=3$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \to \lim_{x\to 4^+} bx+2 = 4b+2 \text{ , } f(4)=4+1=5 \to 4b+2=5 \to 4b=3 \to b=\frac{3}{4}$$

قضایای پیوستگی

۱- اگر f و g در $x=a$ پیوسته باشند آنگاه $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ ($g\neq 0$) نیز در $x=a$ پیوسته‌اند

مثال:

$f(x)=x+2$
$g(x)=x^2-x+2$
$x=2$

$\to f(x)+g(x)=x^2+4$ ✓
$f(x)-g(x)=-x^2+2x$ ✓ , ...

۲- اگر $f(x)$ تابعی پیوسته در $x=a$ باشد آنگاه $kf(x)$ نیز در $x=a$ پیوسته است $k\in\mathbb{R}$

مثال: $f(x)=x^2 \to kf(x)=kx^2$ ✓

۳- اگر تابع $f(x)$ در $x=x_0$ پیوسته باشد آنگاه تابع $|f(x)|$ نیز در $x=x_0$ پیوسته است.

مثال: $f(x)=x^2-1 \to |f(x)|=|x^2-1|$ ✓

۴- اگر تابع $f(x)$ برای همه مقادیر x متعلق به یک بازه مثبت و در نقطه x_0 پیوسته باشد آنگاه $\sqrt{f(x)}$ نیز در x_0 پیوسته است

مثال: $f(x)=x-2$, $\underset{\text{پیوسته}}{x>2}$ $\to \sqrt{f(x)}=\sqrt{x-2}$ ✓

۵- اگر تابع $g(x)$ در $x=x_0$ پیوسته و تابع $f(x)$ در $g(x_0)$ پیوسته باشد آنگاه $fog(x)$ در x_0 پیوسته است.

مثال: **مهم**

$g(x)=2x-1$, $f(x)=\sqrt{x+1}$, $x=2$

$g(2)=3$ ✓ $\to fog(x)=\sqrt{2x-1+1}=\sqrt{2x}$

در $x=2$ پیوسته است

ج) پیوستگی روی بازه: تابع $f(x)$ را در (a,b) پیوسته گوئیم هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

تذکر: تابع $f(x)$ را در بازه $[a,b]$ پیوسته گوئیم هرگاه در (a,b) پیوسته بوده و در b پیوستگی چپ و در a پیوستگی راست داشته باشد.

مثال: حدود a را طوری بیابید که تابع $y=\frac{x-1}{x^2+ax+1}$ همواره پیوسته باشد؟

$$x^2+ax+1\neq 0 \to \Delta<0 \to a^2-4<0 \to -2<a<2$$

تذکر: توابع رادیکالی با فرجه زوج اگر زیر رادیکال چند جمله‌ای باشد وقتی پیوسته‌اند که زیر رادیکال بزرگتر از صفر باشد. اگر داخل رادیکال کسری باشد تعیین علامت شود.

مثال: حدود a را طوری بیابید که تابع $y=\sqrt{ax^2+x+a}$ همواره پیوسته باشد؟

$$ax^2+x+a\geq 0$$

$$\begin{cases}\Delta\leq 0 \\ a>0\end{cases} \to 1-4a^2\leq 0 \to 4a^2\geq 1 \to a^2\geq \frac{1}{4} \to \begin{cases}a\geq \frac{1}{2} \\ \cancel{a\leq -\frac{1}{2}}\end{cases} \to a\geq \frac{1}{2}$$

مثال: بازه پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}}$ را بیابید.

تذکر: توجه که از ترکیب توابع رادیکالی و کسری و چندجمله‌ای اند در تمام بازه‌هایی که زیرمجموعه‌ای از دامنه‌شان هستند پیوسته اند.

مثال: بازه پیوستگی تابع $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$ را بیابید؟

$$\begin{matrix} x-2\geq 0 \to x\geq 2 \\ x-4\neq 0 \to x\neq 4 \end{matrix} \to D_y=[2,4)\cup(4,+\infty)$$

که دامنه همان پیوستگی بازه می‌باشد.

$\boxed{\text{تمرین ۱۹:}}$ تابع $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{-x}}$ در کدام مجموعه پیوسته است؟

حل:

$$\begin{cases}-x\geq 0 \to -x>0 \to x<0 \to D_f=(-\infty,0) \\ \sqrt{-x}\neq 0 \to -x\neq 0\end{cases}$$

فصل چهارم

مشتق:

$f(x)=x^2+2x-1 \quad x=1 \quad f(1)=2$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 4$

تعریف: اگر تابع $f(x)$ در a پیوسته و حد کسر $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وقتی $x \to a$ موجود (متناهی) باشد این حد را مشتق تابع f در نقطه a گوییم و با $f'(a)$ نشان می‌دهیم.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad ; \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (x-a=h)$$

1) $f(x)=x^2$, 2) $f(x)=x^3$, 3) $f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

مثال: مشتق تابع $f(x)=5x^2$ را در نقطه $x=2$ با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{5x^2-20}{x-2}=\lim_{x\to 2}5\frac{\overbrace{(x^2-4)}^{(x-2)(x+2)}}{x-2}=\lim_{x\to 2}5(x+2)=20$$

$$(\sqrt{x})'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\times\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تذکر: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد آنگاه مشتق راست تابع f به صورت زیر است:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad ; \quad f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}=\sin x\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)+\frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}$$

و به همین ترتیب اگر f در $x=a$ پیوسته باشد آنگاه مشتق چپ تابع f به صورت زیر است:

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال: نشان دهید $f(x)=|x|$ در نقطه صفر مشتق‌ناپذیر است.

مثال: نشان دهید $g(x)=|x^2-4|$ در نقطه ۲ مشتق‌ناپذیر است.

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ ax+b & x\geq 1\end{cases}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که $f'(1)$ موجود باشد.

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b \Longrightarrow a+b=1$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(ax+b)-\overbrace{(a+b)}^{f(1)=a+b}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=a$$

$\to a=2$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$$

$a+b=1 \to b=-1$

۳۰

قضایای مشتق :

$f(x)=\sqrt{x} \rightarrow \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \xrightarrow{\lim} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۱) $f(x)=c \rightarrow f'(x)=0$

$y=2 \rightarrow y'=0$

۲) $f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

$y=x^3 \rightarrow y'=3x^2$

۳) $f(x)=u+v \rightarrow f'(x)=u'+v'$

$y=x^3+2x^2 \rightarrow y'=3x^2+4x$

۴) $f(x)=u.v \rightarrow f'(x)=u'v+v'u$

$y=(2x+1)(x^2+1) \rightarrow y'=2(x^2+1)+2x(2x+1)$

۵) $f(x)=u^n \rightarrow f'(x)=nu'u^{n-1}$

۶) $f(x)=\frac{u}{v} \rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

$y=\frac{x}{x+2} \rightarrow y'=\frac{1(x+2)-1(x)}{(x+2)^2}$

۷) $f(x)=\frac{1}{u} \rightarrow f'(x)=\frac{-u'}{u^2}$

$y=\frac{1}{x} \rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}$

۸) $f(x)=\sqrt[n]{u} \rightarrow f'(x)=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

$y=\sqrt[3]{x} \rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۹) $f(x)=\sqrt{u} \rightarrow f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$y=\sqrt{x} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۱۰) $f(x)=\sin u \rightarrow y'=u'\cos u$

۱۱) $f(x)=\cos u \rightarrow y'=-u'\sin u$

۱۲) $f(x)=\tan u \rightarrow f'(x)=u'(1+tg^2 u)$

۱۳) $f(x)=\cot u \rightarrow f'(x)=-u'(1+\cot^2 u)$

۱۴) $f(x)=\sin^n u \rightarrow f'(x)=nu'\sin^{n-1}u\cos u$

$y=\sin^2 x \rightarrow y'=2\sin x\cos x$

۱۵) $f(x)=\cos^n u \rightarrow f'(x)=-nu'\cos^{n-1}u\sin u$

$y=\cos^3 x \rightarrow y'=-3\cos^2 x\sin x$

$y=\cos^2 x$ [illegible]

۱۶) $y=\tan^n u \rightarrow y'=nu'(1+tg^2 u)tg^{n-1}u$

۱۷) $y=|u| \rightarrow y'=\frac{uu'}{|u|}$

۱۸) $y=f(u) \rightarrow y'=u'f'(u)$

۱۹) $y=(f\circ g)(x) \rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$

۲۰) $y=\ln u \rightarrow y'=\frac{u'}{u}$

$y=\ln x \rightarrow y'=\frac{1}{x}$

۲۱) $y=\log x \rightarrow y'=\frac{1}{x}\log_{10} e$

۲۲) $y=e^u \rightarrow y'=u'e^u$

$y=2e^{2x} \rightarrow y'=4e^{2x}$

۲۳) $y=\log_a u \rightarrow y'=\frac{1}{\ln a}\frac{u'}{u}$

$a>0, a\neq 1$

$\boxed{\cancel{y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}}}$

$y=\sqrt[n]{u^m}=u^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y'=\frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}u'$

$y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}=\frac{m}{n}u'\sqrt[n]{u^{m-n}}$

$\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}} \rightarrow y'=\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$

$\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

$\lim \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}$

$\frac{\sin x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=\cos x$

$\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\frac{(?)x^n\Delta x+\dots+(?)x\Delta x^{n-1}}{\Delta x}$ $nx^{n-1}\frac{\Delta x}{\Delta x}$ [illegible]

مشتق تابع ضمنی: تابع ضمنی به صورت $f(x,y)=0$ است و مشتق آن برابر $-\frac{f'(x)}{f'(y)}$ است.

مثال ۱: اگر $f(x,y)=x^2y+2xy^2+x$ آنگاه مشتق این تابع را بیابید.

$$f'(x,y)=-\frac{2xy+2y^2+1}{x^2+4xy}$$

~~تذکر: معادله خط مماس بر $f(x,y)=0$ در نقطه (a,b)~~ $\cancel{y-y_0=m(x-x_0)}$ $\cancel{m=f'(a,b)}$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی:

1) $y=\mathrm{Arcsin}\,u\to y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\cancel{y=\mathrm{Arcsin}\,x^3\to y'=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}}$

2) $y=\mathrm{Arccos}\,u\to y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

3) $y=\mathrm{Arctg}\,u\to y'=\frac{u'}{1+u^2}$

4) $y=\mathrm{Arcctg}\,u\to y'=-\frac{u'}{1+u^2}$

محاسبه مشتق بعضی توابع به کمک $\ln$: محاسبه مشتق بعضی توابع به کمک $\ln$ انجام می‌پذیرد. بدین منظور از طرفین معادله $\ln$ گرفته و بعد از مشتق گیری از طرفین مورد نظر مشتق بدست می‌آید.

مثال: مشتق تابع $y=x^{\sin x}$ را بیابید.

$$\ln y=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x\xrightarrow{\text{مشتق از طرفین}}\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x$$

$$\to y'=y\left(\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x\right)\to y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x\right)$$

$\boxed{\text{تمرین ۲۰:}}$ مشتق توابع زیر را حساب کنید.

1) $y=2^{x^2}$ 2) $f(x,y)=e^{2x}+xy+\sin y$

حل:

1) $\ln y=\ln 2^{x^2}=x^2\ln 2\to\frac{y'}{y}=2x\ln 2\to y'=y(2x\ln 2)=2^{x^2}(2x\ln 2)$

2) $f'(x,y)=-\frac{2e^{2x}+y}{x+\cos y}$

$\cancel{\frac{1}{2x}\cos(\ln x)}$

$\cancel{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\left(1+\tan^2\sqrt{\cos x}\right)}$

مشتق مراتب بالاتر: اگر از مشتق تابع $f(x)$ یعنی $f'(x)$ دوباره مشتق گرفته شود حاصل را $f''(x)$ نشان داده و آن را مشتق دوم تابع f و اگر از مشتق دوم دوباره مشتق گرفته شود حاصل را $f'''(x)$ مشتق سوم و ... گویند.

مثال: مشتق سوم تابع $y=3x^5+x^3$ برابر است با:

$$y'=10x^4+3x^2$$
$$y''=40x^3+6x \longrightarrow y'''=120x^2+6$$

تذکر: مشتق مرتبه n ام تابع $y=(ax+b)^n$ برابر $a^n \times n!$ است:

$$y'=n(a)(ax+b)^{n-1}$$
$$y''=n(n-1)a^2(ax+b)^{n-2} \quad \cdots \quad y^{(n)}=n(n-1)\cdots 2\times 1\,(a^n)(ax+b)^0$$
$$\rightarrow y^{(n)}=n!\,a^n$$

$\boxed{\text{تمرین ۲۱:}}$ مشتق مرتبه n ام تابع $y=e^{ax}$ را بدست آورید؟

حل:
$$y'=ae^{ax} \rightarrow y''=a^2e^{ax} \rightarrow y'''=a^3e^{ax} \cdots y^{(n)}=a^ne^{ax}$$

$\boxed{\text{در فصل دوم درس ریاضی ۱ کامل بیان شد}}$

~~قاعده هوپیتال: اگر در محاسبه حد به $\frac{0}{0}$ جواب مبهم برسیم آنگاه جواب حد برابر مشتق صورت بر مشتق مخرج~~

مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$ ، $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$ ، $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{e^{3x}+x}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{1}=2\times 2=4$$

$\boxed{\text{تمرین ۲۲:}}$ حاصل $\lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x^3+1}$ را بیابید.

حل: هوپیتال
$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{3x^2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{2}$$

[illegible]