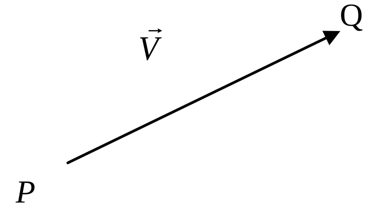
# فصل اول

# بردارها و توابع برداری

### مقدمه

در ریاضی و فیزیک و ... اغلب به کمیتهایی بر می‌خوریم که دارای اندازه و جهت مـی‌باشـند مانند نیرو، سرعت، شتاب و بردار تغییر مکان و به آنها کمیت‌های برداری گفته مـی‌شـوند. ایـن کمیت‌ها را می‌توان به طور هندسی با یـک پـاره خـط جهـت‌دار نمـایش داد کـه بـه آن بـردار می‌گویند. در مقابل آن کمیت‌هایی مانند طول، مساحت ، حجم که فقط انـدازه داشـته باشـد را کمیت اسکالری می‌گویند. در این فصل به تعریف و خواص بردارها پرداختـه و کاربردهـای آن را نیز بیان می‌کنیم. بررسی بردارها آنالیز برداری نام یافته است.

روش پرداختن به آنالیز برداری می‌تواند هندسی یا تحلیلـی باشـد. در روش هندسـی ابتـدا یک پاره خط جهت‌دار را پاره‌خطـی از نقطـه‌ایماننـد $P$ تـا نقطـه‌ایماننـد $Q$ تعریـف و ایـن پاره‌خط را با $\overrightarrow{PQ}$ نشان می‌دهیم. نقطه $P$ را نقطه شروع و نقطه $Q$ را نقطه پایـان مـی نـامیم. بردار را با $\vec{V}$ نشان می دهند.

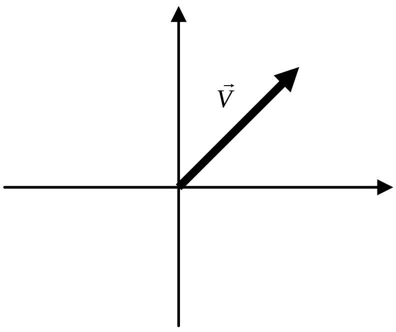


## ۱-۱ بردارها در صفحه

**تعریف ۱-۱-۱** . یک بردار در صفحه به صورت پاره‌خطی جهت‌دار از مبداء مختصات به نقطه دلخواه $A=(x, y)$ تعریف می‌شود . اعداد $y, x$ را مولفه‌های بردار می‌گویند. بردار را با $\vec{V} = \vec{OA} = \langle x, y\rangle$ نشان می دهند.

بین بردارهای $\langle x, y\rangle$ در صفحه و نقاط $(x, y)$ در صفحه تناظر یک به یکی وجود دارد. اگر $\vec{V} = \langle x, y\rangle$ یک بردار باشد و $A=(x, y)$ یک نقطه در صفحه باشد آن‌گاه بردار $\vec{V}$ را با پاره خطی جهت‌دار مانند $\vec{OA}$ به طور هندسی زیر نمایش داده می‌شود.

البته بردار را به صورت ماتریس ستونی $\vec{V} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نیز نشان می‌دهند.




**تذکر ۱-۱-۱**. اگر $B=(x_2 , y_2), A=(x_1 , y_1)$ دو نقطه در صفحه باشند، آن‌گاه بردار $\vec{V} = \vec{AB}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{V} = \vec{AB} = \left\langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \right\rangle$$

**تعریف ۱-۱-۲** . بردار $\langle 0,0\rangle$ که همه مولفه‌های آن صفر است را بردار صفر گفته و با $\vec{O}$ نشان می‌دهند.

**قضیه ۱-۱-۱** . اگر $\vec{V} = \langle x, y\rangle$ یک بردار باشد، آن‌گاه اندازه یا طول این بردار برابر است با:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**اثبات.**

$$O=(0,0)\,,\ A=(x,y)$$
$$\vec{V}=OA \Rightarrow \left|\vec{V}\right|=|OA|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

**مثال ۱-۱-۱** . اندازه بردار $\vec{V}=\langle -2,3\rangle$ برابر است با:

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$$

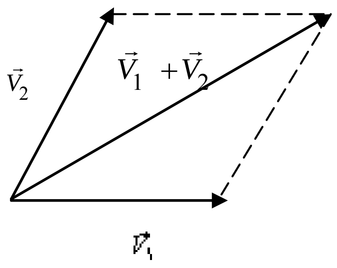
**تعریف ۱-۱-۳** . اگر $\vec{V_1}=\langle x_1,y_1\rangle$ و $\vec{V_2}=\langle x_2,y_2\rangle$ آن‌گاه:

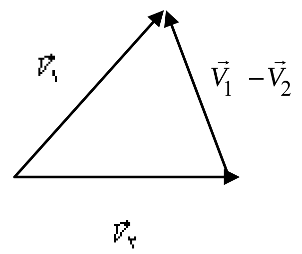
$$\vec{V_1}+\vec{V_2}=\langle x_1+x_2\ ,y_1+y_2\rangle$$
$$\vec{V_1}-\vec{V_2}=\vec{V_1}+(-\vec{V_2})=\langle x_1-x_2\ ,y_1-y_2\rangle$$

**مثال ۱-۱-۲** . اگر $\vec{V_1}=\langle 3,-1\rangle$ و $\vec{V_2}=\langle -4,5\rangle$ آن‌گاه:

$$\vec{V_1}+\vec{V_2}=\langle 3-4\ ,-1+5\rangle=\langle -1\ ,\ 4\rangle$$
$$\vec{V_1}-\vec{V_2}=\vec{V_1}+(-\vec{V_2})=\langle 3+4\ ,-1-5\rangle=\langle 7\ ,-6\rangle$$

**تذکر ۱-۱-۲.** برای تعبیر هندسی مجموع و تفاضل دو بردار، از اشکال زیراستفاده می‌کنیم:




**تعریف ۱-۱-۴** . اگر $c$ یک اسکالر (عدد حقیقی) و $\vec{V} = \langle x, y \rangle$ یک بردار باشد آن‌گاه :

$$c\vec{V} = c\langle x, y \rangle = \langle cx, cy \rangle$$

**مثال ۱-۱-۳.** اگر $\vec{V} = \langle x, y \rangle$ برداری دلخواه و $c$ یک اسکالر باشد، نشان دهید:

$$c(\vec{O}) = \vec{O} \quad و \quad 0(\vec{V}) = \vec{O}$$

حل.

$$0(\vec{V}) = 0\langle x, y \rangle = \langle 0\times x \; ,0\times y \rangle = \langle 0 \; , 0 \rangle = \vec{O}$$

$$c\,(\vec{O}) = c\langle 0 \; , 0 \rangle = \langle c\times 0, c\times 0 \rangle = \langle 0 \; , 0 \rangle = \vec{O}$$

**قضیه ۱-۱-۲** . اگر $\vec{V}_1$، $\vec{V}_2$، $\vec{V}_3$ سه بردار در صفحه ، $d, c$ دو اسکالر باشند، آن‌گاه جمع برداری و ضرب اسکالری از خواص ذیل برخوردارند:

۱) $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$ (قانون جمع پذیری)

۲) $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ (قانون شرکت پذیری)

۳) $\vec{V} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{V} = \vec{V}$ (عضو بی‌اثر جمع)

۴) $\vec{V}+\left(-\vec{V}\right)=\vec{O}$ (قرینه جمعی)

۵) $(cd)\vec{V}=c\left(d\vec{V}\right)$ (شرکت پذیری اسکالری)

۶) $c\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=c\vec{V}_1+c\vec{V}_2$ (قانون پخش‌پذیری)

۷) $(c+d)\vec{V}=c\vec{V}+d\vec{V}$ (قانون پخش پذیری)

۸) $1\vec{V}=\vec{V}$ (عضو بی‌اثر ضرب اسکالر)

۹) $\left|c\vec{V}\right|=|c|\ \left|\vec{V}\right|$

**تعریف ۱-۱-۵(بردارهای یکه)**. به دو بردار $\vec{i}=\langle 1,0\rangle$ و $\vec{j}=\langle 0,1\rangle$ که طول آنها یک می‌باشد، بردارهای یکه می‌گویند.

**تذکر ۱-۱-۳** . بردار $\vec{V}=\langle x,y\rangle$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی بردارهای یکه نشان داد:

$$\vec{V}=\langle x,y\rangle=\langle \mathrm{x},0\rangle+\langle 0,y\rangle=x\langle 1\,,0\rangle+y\langle 0\,,1\rangle=x\vec{i}+y\vec{j}$$

**تعریف ۱-۱-۶ (بردار یکه همجهت)**. برداریکه همجهت با بردار $\vec{V}=\langle x,y\rangle$ را با $\vec{u}$ نشان می‌دهیم که در آن:

$$\vec{u}=\frac{x}{\left|\vec{V}\right|}\vec{i}+\frac{y}{\left|\vec{V}\right|}\vec{j}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$$

**مثال ۱-۱-۴**. اگر $\vec{V}_1=\langle 4\,,-1\rangle$ و $\vec{V}_2=\langle -3\,,\,3\rangle$ آن‌گاه بردار یکه همجهت $\vec{V}_1+\vec{V}_2$ را بیابید.

حل.

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \langle 4-3 , -1+3 \rangle = \langle 1,2 \rangle = \vec{i} + 2\vec{j}$$
$$\left| \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

**تعریف ۱-۱-۶(ضرب داخلی).** اگر $\vec{V}_1 = \langle x_1 , y_1 \rangle$ و $V_2 = \langle x_2 , y_2 \rangle$ دو بردار در صفحه باشند، آن‌گاه حاصلضرب داخلی این دو بردار را با $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ نوشته و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \langle x_1 , y_1 \rangle \bullet \langle x_2 , y_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

**مثال ۱-۱-۵.** اگر $\vec{V}_1 = \langle 2,-3 \rangle$ و $\vec{V}_2 = \langle -1,2 \rangle$ آن‌گاه :

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \langle 2 , -3 \rangle \bullet \langle -1 , 2 \rangle = -2-6 = -8$$

**تذکر ۱-۱-۴.** حاصلضرب داخلی بردارهای یکه $\vec{j},\vec{i}$ به صورت زیر است:

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = 1$$
$$\vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{i} = 0$$

**قضیه ۱-۱-۳.** اگر $\vec{V}_3 , \vec{V}_2 , \vec{V}_1$ سه بردار در صفحه باشند آن‌گاه:

۱) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \bullet \vec{V}_1$ (قانون تعویض‌پذیری)

۲) $\vec{V}_1 \bullet \left( \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \right) = \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 + \vec{V}_2 \bullet \vec{V}_3$ (قانون پخش‌پذیری)

**تذکر ۱-۱-۵** . اگر $\theta$ زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ باشد، آن‌گاه

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \left|\vec{V}_1\right| \left|\vec{V}_2\right| \cos\theta$$

**مثال ۱-۱-۶**. زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{V}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$ را بیابید.

حل :

$$\left|\vec{V}_1\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \ , \qquad \left|\vec{V}_2\right| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \langle 3 , -2\rangle \bullet \langle 2 , 1\rangle = 6 - 2 = 4$$

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \left|\vec{V}_1\right| \left|\vec{V}_2\right| \cos\theta \quad \Rightarrow 4 = \sqrt{13} \times \sqrt{5} \cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{65}}$$

**تعریف ۱-۱-۸** . دو بردار $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ را موازی گویند، هرگاه راستاهای آن دو موازی باشد یعنی:

$$\vec{V}_1 = c\vec{V}_2 \qquad \text{یا} \qquad \vec{V}_2 = c\vec{V}_1$$

**مثال ۱-۱-۷** : دو بردار $\overrightarrow{V_1} = \langle 3, -4\rangle$ و $\overrightarrow{V_2} = \left\langle \frac{3}{4} , -1 \right\rangle$ موازیند زیرا:

حل:

$$\vec{V}_1 = \langle 3 , -4\rangle = 4\left\langle \frac{3}{4}, -1\right\rangle = 4\vec{V}_2 \quad \Rightarrow \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$$

**تعریف ۱-۱-۹.** دو بردار $\vec{V_1}$ ,$\vec{V_2}$ بر هم عمودند هرگاه زاویه بین این دو بـردار $\frac{\pi}{2}$ باشـد. در این صورت حاصلضرب داخلی آن‌دو برابر صفر است:

$$\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Leftrightarrow \vec{V}_1 \bullet \vec{V_2} = \left|\vec{V_1}\right| \left|\vec{V_2}\right| \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

**مثـال ۱-۱-۸ :** نشـان دهیـد کـه دو بـردار $\vec{V_1} = \langle -4,5 \rangle$ و $\vec{V_2} = \langle 10 , 8 \rangle$ بـر هـم عمودند.

حل.

$$\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Leftrightarrow \vec{V}_1 \bullet \vec{V_2} = 0$$

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V_2} = \langle -4,5 \rangle . \langle 10,8 \rangle = -40 + 40 = 0$$

**تمرینات ۱-۱**

۱- برای دو نقطه $A=(2,-3)$ , $B=(-4,5)$ بردارهای $\vec{AB}$ , $\vec{BA}$ را مشخص کنید.

۲- مساحت مثلثی را بیابید که نقاط زیر رئوس آن باشد:

$$A=(2,1)\,,\ B=(2,5)\,,\ C=(6,1)$$

۳- اگر $\vec{V_1}=\vec{i}+3\vec{j}$ , $\vec{V_2}=-4\vec{i}+2\vec{j}$ باشد، آن‌گاه مطلوب‌است:

$$\vec{u}_{\vec{V_1}+\vec{V_2}} \quad \text{و} \quad \vec{u}_{2\vec{V_1}-\vec{V_2}}$$

۴- قضیه ۱- ۱- ۲ را ثابت کنید.

۵- قضیه ۱- ۱- ۳ را ثابت کنید

۶- زاویه بین دو بردار $\vec{V_1}=\langle 1\,,\,5\rangle$ , $\vec{V_2}=\langle 2\,,\,-1\rangle$ را بیابید.

۷- اگر $\vec{V_1}=3\vec{i}+2\vec{j}$ , $\vec{V_2}=2\vec{i}+k\vec{j}$ دو بردار باشند که در آن $k$ یک اسکالر است، آن‌گاه :

الف) مقدار $k$ را طوری بیابید که بردارهای $\vec{V_1}$ , $\vec{V_2}$ بر هم عمود باشند.

ب) مقدار $k$ را طوری بیابید که بردار $\vec{V_1}$ , $\vec{V_2}$ با هم موازی باشند.

۸- اگر $\vec{V_1}=\langle -3,2\rangle$ , $\vec{V_2}=\langle 4,-1\rangle$ , $\vec{V_3}=<8,3>$ آن‌گاه اسکالرهای $h,k$ را طوری بیابید که $h\vec{V_1}+k\vec{V_2}=\vec{V_3}$

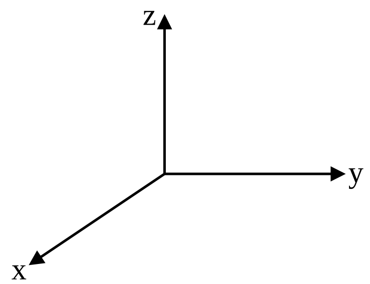
## ۱-۲ بردارها در فضای سه بعدی $R^3$

$R$ را مجموعه اعداد حقیقی یا فضای یک بعدی، $R^2$ را صفحه یا فضای دو بعدی گفته و به صورت $R^2=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$ نمایش داده می‌شود.

**تعریف۱-۲-۱.** مجموعه همه سه تایی‌های مرتب $(x,y,z)$ از اعداد حقیقی را فضای سه بعدی $R^3$ گفته و به صورت $R^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in R\}$ نشان می‌دهند.

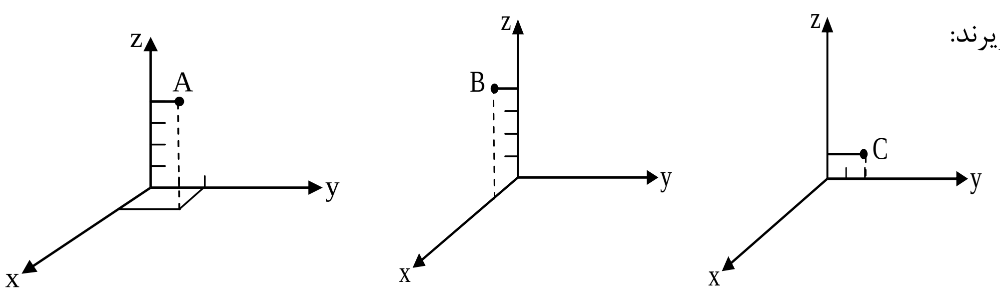
سه تایی مرتب $(x,y,z)$ نمایش نقاط در فضای سه بعدی می‌باشند.

برای نمایش نقطه در فضای سه بعدی، سه محور $z,y,x$ که یک دستگاه مختصات راست‌گرد می باشد به صورت مقابل در نظر گرفته می شود:

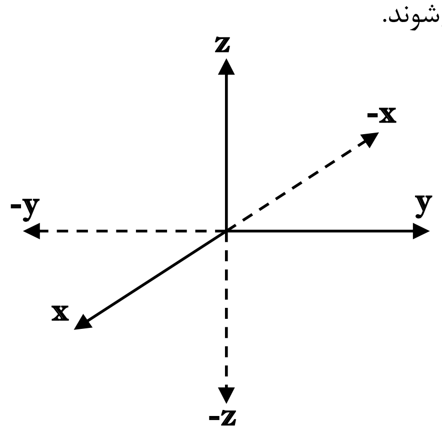



**تذکر۱-۲-۱.** برای نشان دادن یک نقطه در آن ابتدا در صفحه $xoy$ نقطه‌ای به مختصات $(x,y)$ را یافته و از آن نقطه خطی بر صفحه $xoy$ عمود کرده و روی خط عمود به اندازه $z$ جدا می کنیم.

**مثال ۱-۲-۱.** نقاط $A=(1,2,4)$ , $B=(2,0,4)$ , $C=(0,2,1)$ را روی فضای $R^3$ به‌صورت زیرند:



**تذکر ۱-۲-۲.** محورهای منفی در فضای $R^3$ مانند صفحه و محـور اعـداد حقیقـی در خـلاف جهت محورهای مثبت در نظر گرفته می‌شوند.




**تعریف۱- ۲-۲.** اگر $A=(a,b,c)$ , $B=(d,e,f)$ دو نقطه در فضای $R^3$ باشند، آن‌گـاه فاصله این دو نقطه و مختصات نقطه وسط پاره خط $AB$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$AB=\sqrt{(d-a)^2+(e-b)^2+(f-c)^2}$$

$$M=(\frac{a+d}{2},\frac{b+e}{2},\frac{c+f}{2})$$

**مثال ۱-۲-۲.** اگر $A=(2,3,-4)$ , $B=(1,-1,2)$ دو نقطه در فضای سه بعدی $R^3$ باشند، آن‌گاه فاصله بین دو نقطه و مختصات نقطه وسط پاره خط $AB$ را بیابید.

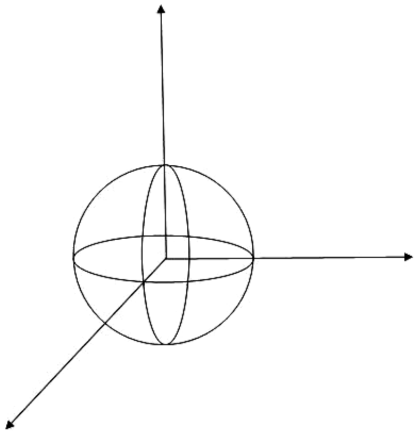
حل:

$$AB=\sqrt{(1-2)^2+(-1-3)^2+(2+4)^2}=\sqrt{53}$$

$$M=\left(\frac{2+1}{2},\frac{3-1}{2},\frac{-4+2}{2}\right)=(\frac{3}{2},1,-1)$$

**تعریف۱-۲-۳ (کُره).** مجموع جمیع نقاطی از فضای $R^3$ که از یک نقطه ثابت به یک فاصله باشند را **کُره** گویند. نقطه ثابت را مرکز و فاصله ثابت را شعاع کره می‌گویند. معادله کره‌ای که مرکز آن نقطه $(a,b,c)$ و شعاع آن $r$ می‌باشد به صورت زیر است:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$



**مثال۱-۲-۳.** معادله کره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(2,-1,3)$ و شعاع آن $r=3$ باشد.

حل.

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=3^2$$
$$x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-6z+9=9$$
$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$$

**مثال۱-۲-۴.** معادله کره ای را بیابید که نقاط $A=(-5,6,-2)$ , $B=(9,-4,0)$ دو سر یک قطر آن باشد.

حل.

قطر کره می‌شود: $AB=\sqrt{(9+5)^2+(-4-6)^2+(0+2)^2}=10\sqrt{3}$

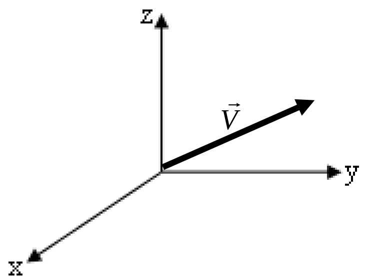
و از آن شعاع کره می‌شود:

$$\Rightarrow r=\frac{d}{2}=\frac{AB}{2}=5\sqrt{3}$$

$$M=\left(\frac{-5+9}{2},\frac{6-4}{2},\frac{-2+0}{2}\right)=(2,1,-1)$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=75$$

**تعریف۱-۲-۴ (بردار در** $R^3$**)**. یک بردار در فضای سه بعدی $R^3$ پاره خطی است جهت‌دار که از مبدا مختصات یعنی نقطه $O=(0,0,0)$ به نقطه دلخواه $A=(x,y,z)$ رسم کرده و آنرا با $\vec{V}=\langle x,y,z\rangle$ نشان می‌دهند.




همچنین اندازه بردار $\vec{V}=\langle x,y,z\rangle$ مانند بردارها در صفحه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

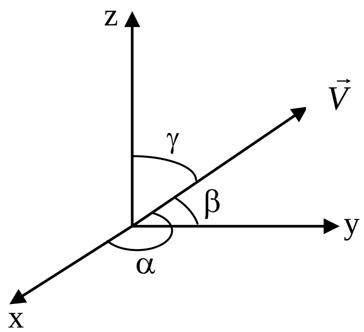
**تعریف۱- ۲-۵ (بردارهای یکه در** $R^3$**)**. بردارهای یکه در فضای سه بعدی $R^3$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\vec{i}=\langle 1,0,0\rangle \quad \text{و} \quad \vec{j}=\langle 0,1,0\rangle \quad \text{و} \quad \vec{k}=\langle 0,0,1\rangle$$

و همان‌طور که در بخش اول گفته شد، می توان یک بردار را در فضای سه بعدی نیز به صورت ترکیب خطی از بردارهای یکه نوشت. یعنی:

$$\vec{V}=\langle x,y,z\rangle=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

**تعریف۱-۲-۶ (زوایای هادی).** به زوایایی که یک بردار مانند $\vec{V}=\langle x,y,z\rangle$ با محورهای مختصات می‌سازد زوایای هادی بردار گویند که به ترتیب از روابط زیر بدست می‌آید:




$$\alpha=\cos^{-1}\frac{x}{|\vec{V}|}$$

$$\beta=\cos^{-1}\frac{y}{|\vec{V}|}$$

$$\gamma=\cos^{-1}\frac{z}{|\vec{V}|}$$

**مثال ۱-۲-۵.** زوایای هادی بردار $\vec{V}=\langle 2,1,4\rangle$ را بیابید.

حل.

$$|\vec{V}|=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$\beta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{21}}$$

$$\gamma=\cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{21}}$$

**تعریف۱-۲-۷ (بردار یکه همجهت).** بردار یکه همجهت با $\vec{V}=\langle x,y,z\rangle$ را با $\vec{u}$ نشان می‌دهیم که در آن

$$\vec{u}=\frac{x}{|\vec{V}|}\vec{i}+\frac{y}{|\vec{V}|}\vec{j}+\frac{z}{|\vec{V}|}\vec{k}$$

**مثال۱-۲-۶.** بردار یکه همجهت با بردار $\vec{V}=\langle 3,2,6\rangle$ را بنویسید.

حل.

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{3^2+2^2+6^2}=\sqrt{49}=7$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\frac{3}{7}\vec{i}+\frac{2}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}$$

**قضیه ۱-۲-۱.** اگر $\cos\alpha$ , $\cos\beta$ , $\cos\gamma$ زوایای هادی یک بردار باشند، آن‌گاه:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

**اثبات.**

$$\vec{V}=\langle x,y,z\rangle \Rightarrow \left|\vec{V}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\left(\frac{x}{\left|\vec{V}\right|}\right)^2+\left(\frac{y}{\left|\vec{V}\right|}\right)^2+\left(\frac{z}{\left|\vec{V}\right|}\right)^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{\left|\vec{V}\right|^2}$$

$$=\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{\left|\vec{V}\right|^2}=1 \;\Rightarrow\; \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

**مثال۱-۲-۷.** در مثال ۱-۲-۵ داریم:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)^2=1$$

**تعریف۱-۲-۸ (ضرب داخلی).** حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{V}_1=\langle x_1,y_1,z_1\rangle$ و $\vec{V}_2=\langle x_2,y_2,z_2\rangle$ مانند ضرب داخلی بردارها در صفحه تعریف می‌شود:

$$\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

و اگر $\theta$زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1 ,\vec{V}_2$ باشد آن‌گاه $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \left|\vec{V}_1\right| \left|\vec{V}_2\right| \cos\theta$

**مثال ۱-۲-۸.** حاصلضرب داخلی و زاویه بین دو بردار زیر را بیابید:

$$\vec{V}_1 = \langle -3,-4,-5\rangle \text{ و } \vec{V}_2 = \langle 4,-3,5\rangle$$

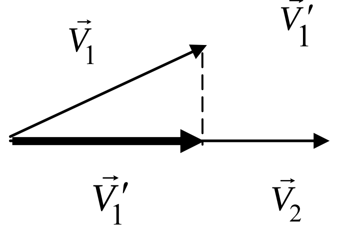
حل.

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -12+12-25 = -25$$

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \left|\vec{V}_1\right| . \left|\vec{V}_2\right| \cos\theta \quad \Rightarrow -25 = \sqrt{50}\times\sqrt{50}\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

**تعریف۱-۲-۹( تصویر یک بردار)** . تصویر بردار $\vec{V}_1$روی بردار $\vec{V}_2$ از رابطه زیر بدست می‌آید:




$$\vec{V}_1' = \frac{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2}{\left|\vec{V}_2\right|^2} \vec{V}_2$$

**مثال۱-۲-۹.** اگر $\vec{V}_1 = \langle -4,-2,4\rangle$ و $\vec{V}_2 = \langle 2,7,-1\rangle$ آن‌گاه تصویر بردار $\vec{V}_1$ را تحت بردار $\vec{V}_2$ بیابید.

حل:

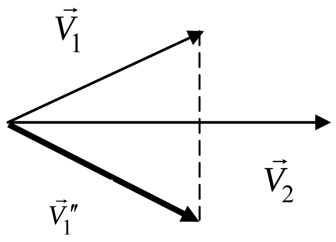
$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -8-14-4 = -26$$

$$\left|\vec{V}_2\right|^2 = 4+49+1 = 54$$

$$\vec{V}_1' = \frac{-26}{54}\langle 2,7,-1\rangle = \left\langle \frac{-26}{27}, \frac{-91}{27}, \frac{13}{27} \right\rangle$$

**تعریف ۱-۲-۱۰ (قرینه یک بردار)**. قرینه بردار $\vec{V}_1$ تحت بردار $\vec{V}_2$ را با $\vec{V}_1''$ نشان می دهند که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\vec{V}_1'' = 2\vec{V}_1' - \vec{V}_1$$




**مثال۱-۲-۱۰.** قرینه بردار $\vec{V}_1$ مثال۱-۲-۹ نسبت به بردار $\vec{V}_2$ را بدست آورید.

حل.

$$\vec{V}_1' = \left\langle \frac{-26}{27}, \frac{-91}{27}, \frac{13}{27} \right\rangle$$

$$\vec{V}_1'' = 2\vec{V}_1' - \vec{V}_1 = 2\left\langle \frac{-26}{27}, \frac{-91}{27}, \frac{13}{27} \right\rangle - \langle -4,-2,4\rangle = \left\langle \frac{56}{27}, \frac{-128}{27}, \frac{-95}{27} \right\rangle$$

**تعریف ۱-۲-۱۱ (حاصلضرب خارجی دو بردار)**. حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{V}_1 = \langle a_1, b_1, c_1\rangle$ و $\vec{V}_2 = \langle a_2, b_2, c_2\rangle$ بردار دیگری است با خصوصیات زیر:

الف) این بردار بر صفحه دو بردار عمود است

ب) جهت مثبت آن از قانون سه انگشت به‌دست می آید

ج) اندازه‌اش برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که روی دو بردار ساخته می شود و مبداء آن نقطه تلاقی دو بردار است.

و آنرا با $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ نشان می‌دهیم که مولفه‌های آن در تساوی زیر آمده است:

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= (b_1c_2 - c_1b_2)\vec{i} - (a_1c_2 - c_1a_2)\vec{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\vec{k}$$

**مثال۱-۲-۱۱.** حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{V}_1 = \langle 1,2,-1\rangle$ و $\vec{V}_2 = \langle 3,0,2\rangle$ را بیابید.

حل:

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 6\vec{k}$$

**تذکر ۱-۲-۳.** اندازه ضرب خارجی دو بردار از دستور زیر بدست می آید که در آن $\theta$ زاویه بین دو بردار می‌باشد:

$$\left|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right| = \left|\vec{V}_1\right|\left|\vec{V}_2\right| \sin\theta$$

**قضیه ۱-۲-۲.** اگر $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ سه بردار در فضای $R^3$ و $c,r$ دواسکالر باشند،آن‌گاه خواص زیر برای ضرب خارجی برقرار است:

۱) $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$

۲) $\vec{V}_1 \times \vec{V}_1 = \vec{0}$

۳) $r\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = r\left(\hat{V}_1 \times \vec{V}_2\right)$

۴) $\left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) \times \overrightarrow{V_3} = \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_3\right) + \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right)$

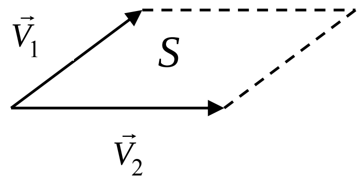
۵) $\vec{V}_1 \cdot \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) = 0 \quad , \quad \vec{V}_2 \cdot \left(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right) = 0$

۶) $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = 0 \iff \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$

**تذکر۱-۲-۴ (کاربردهای ضرب خارجی).**

**۱**- مساحت متوازی الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ بنا می‌شود برابر است با :

$$S = \left|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right|$$




**مثال۱-۲-۱۲.** مساحت متوازی الاضلاعی را بیابید که توسط دو بردار زیر تولید می‌شود:

$$\vec{V}_1 = \langle 1,2,-1\rangle \quad ، \quad \vec{V}_2 = \langle 3,0,2\rangle$$

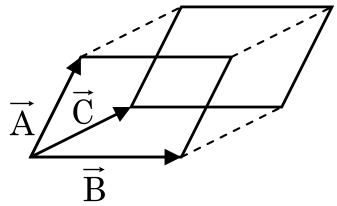
حل.

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$S = \left|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{77}$$

**۲**- حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ بنا می‌شود برابر است با:

$$V = \left|\vec{V}_1 \cdot \left(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3\right)\right|$$



**مثال ۱-۲-۱۳.** حجم متوازی السطوحی که توسط بردارهای $\vec{V_1} = \langle 1,1,0 \rangle$ ، $\vec{V_2} = \langle 0,1,1 \rangle$ ، $\vec{V_3} = \langle 1,0,1 \rangle$ تولید می‌شود را بیابید.

حل.

$$\vec{V_2} \times \vec{V_3} = \langle 1,1,-1 \rangle$$
$$V = \left| \langle 1,1,0 \rangle . \langle 1,1,-1 \rangle \right| = |2| = 2$$

**تمرینات ۱-۲**

۱- مختصات مرکز و اندازه شعاع کره‌ای به معادله زیر را بیابید:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 10 = 0$$

۲- زوایای هادی و بردار یکه همجهت با بردار $\vec{V} = \langle 1,5,-2 \rangle$ را بنویسید.

۳- زاویه بین دو بردار $\vec{V_1} = \langle 4,-2,1 \rangle$ و $\vec{V_2} = \langle -3,3,-5 \rangle$ را بیابید.

۴- اگر دو بردار $\vec{V_1} = \langle 4,-2,2 \rangle$ , $\vec{V_2} = \langle 2,m,1 \rangle$ بر هم عمود باشند مقدار $m$ را بیابید.

۵- سه نقطه $A = (1,2,0)$ , $B = (0,1,1)$ , $C = (-1,3,2)$ رئوس یک مثلث‌اند. زاویه $\hat{A}$ چقدر است؟ (راهنمایی ابتدا بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را محاسبه سپس زاویه بین آنها را بیابید.)

۶- در مثلثی به رئوس $A = (1,1,-1)$ , $B = (0,1,0)$ , $C = (0,1,2)$ نشان دهید دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بر هم عمودند.

۷- ضرب خارجی بردارهای یکه در فضای سه بعدی را بیابید.

۸- قضیه ۱-۲-۲ را اثبات کنید.

۹- اگر $A = (1,0,-1)$ , $B = (2,1,-2)$ , $C = (0,1,-1)$ سه نقطه باشند آن‌گاه تصویر بردار $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ را تحت بردار $\overrightarrow{CA}$ بیابید.

۱۰- تصویر و قرینه بردار $\vec{V_1} = \langle -3,1,0 \rangle$ نسبت به بردار $\vec{V_2} = \langle 1,1,-1 \rangle$ را بیابید.

۱۱- مساحت متوازی الاضلاعی را بدست آورید که توسط بردارهای زیر تولید می‌شود:

$$\vec{V_2} = \langle -3,3,-5 \rangle \text{ و } \vec{V_1} = \langle 4,-2,1 \rangle$$

۱۲- به کمک بردارها ثابت کنید که یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است، اگر و فقط اگر قطرهای آن همدیگر را نصف کنند.

۱۳- به کمک بردارها ثابت کنید که نقاط وسط اضلاع هر چهارضلعی، راسهای یک متوازی الاضلاع اند.

۱۴- حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار $\langle 0,0,1 \rangle = \vec{V_1}$ و $\langle 1,-1,0 \rangle = \vec{V_2}$ و $\langle 1,0,1 \rangle = \vec{V_3}$ بنا می شود را بیابید.

۱۵- حجم متوازی السطوحی را با راس‌های زیر و اضلاع $\vec{PQ}$ , $\vec{PR}$ , $\vec{PS}$ بیابید:

$$P = (-1,2,3)\ ,\ Q = (1,2,4)\ ,\ R = (0,1,2)\ ,\ S = (-1,-1,2)$$

## ۱-۳ توابع برداری

**تعریف۱-۳-۱.** اگر $f_1 , f_2 , f_3$ توابعی حقیقی از متغیر $t$ باشند، آن‌گاه بازای هر عدد حقیقی $t$ در قلمرو مشترک $f_1 , f_2 , f_3$ برداری مانند $\vec{R}$ وجود دارد که در آن $\overrightarrow{R(t)} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ و به آن تابع برداری می‌گویند.

**مثال۱-۳-۱.** $\overrightarrow{R(t)} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ یک تابع برداری است، اگر $t = 2$ باشد،آن‌گاه:

$$\overrightarrow{R(2)} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

**تعریف۱-۳-۲(حد تابع برداری).** اگر $\overrightarrow{R(t)} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ یک تابع برداری باشد، آن‌گاه حد این تابع وقتی که $t \to t_1$ میل کند در صورت وجود حد مولفه‌های این تابع برداری یعنی $\lim\limits_{t\to t_1} f_1(t),\ \lim\limits_{t\to t_1} f_2(t),\ \lim\limits_{t\to t_1} f_3(t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lim_{t\to t_1} \overrightarrow{R(t)} = \left[\lim_{t\to t_1} f_1(t)\right]\vec{i} + \left[\lim_{t\to t_1} f_2(t)\right]\vec{j} + \left[\lim_{t\to t_1} f_3(t)\right]\vec{k}$$

**مثال۱-۳-۲.** حد تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} - 4t^3\vec{k}$ را وقتی $t \to 1$ بیابید.

حل:

$$\lim_{t\to 1} \overrightarrow{R(t)} = \lim_{t\to 1} t\vec{i} + \lim_{t\to 1} 2t^2\vec{j} - \lim_{t\to 1} 4t^3\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

**تعریف۱-۳-۳ (مشتق تابع برداری).** اگر $\overrightarrow{R(t)} = f_1\ (t)\vec{i} + f_2\ (t)\vec{j} + f_3\ (t)\vec{k}$ یک تابع برداری باشد، آن‌گاه در صورتی‌که توابع $f3_1\ (t), f_2\ (t), f_1\ (t)$ مشتق پذیر باشند، تابع $\overrightarrow{R(t)}$ مشتق پذیر بوده و مشتق آن می‌شود:

$$\overrightarrow{R'(t)} = f_1'\ (t)\vec{i} + f_2'\ (t)\vec{j} + f_3'\ (t)\vec{k}$$

**مثال۱-۳-۳:** مشتق تابع برداری مثال۱-۳-۱می‌شود: $\overrightarrow{R'(t)} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$

**تذکر۱-۳-۱.** $\overrightarrow{R(t)}$ را بردار وضعیت نیز می‌نامند و مشتق آن یعنی $\overrightarrow{R'(t)}$ را بردار سرعت و مشتق دوم آن یعنی $\overrightarrow{R''(t)}$ را بردار شتاب نیز می‌نامند:

$$V = \left|\overrightarrow{R'(t)}\right| \quad \text{و} \quad a = \left|\overrightarrow{R''(t)}\right|$$

**مثال۱-۳-۴.** بردار وضعیت منحنی $\begin{cases} z = x^2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ را مشخص نموده ، سرعت و شتاب را در $t = 1$ بیابید.

حل.

با فرض $x = t$ آن‌گاه $\begin{cases} z = t^2 \\ t + y = 1 \rightarrow y = 1 - t \end{cases}$ ، در نتیجه:

$$\overrightarrow{R(t)} = t\vec{i} + (1-t)\vec{j} + t^2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{R'(t)} = \vec{i} - \vec{j} + 2t\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{R'(1)} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow V = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{R''(t)} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$$

**تعریف۱-۳-۴ (بردار یکه مماس).** بردار یکه مماس بر منحنی دلخـواه $C$ را بـا $\overrightarrow{T(t)}$ نشـان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{R'(t)}}{\left|\overrightarrow{R'(t)}\right|}$$

**مثال۱-۳-۵.** بردار یکه مماس بر منحنی مثال ۱-۳-۴ را در $t=2$ بیابید.

حل:

$$\overrightarrow{R(2)} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{R'(t)} = \vec{i} - \vec{j} + 2t\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{R'(2)} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow V = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$$

پس:

$$\overrightarrow{T(1)} = \frac{\overrightarrow{R'(1)}}{\left|\overrightarrow{R'(1)}\right|} = \frac{2}{\sqrt{18}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{18}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{18}}\vec{k}$$

**تعریف۱-۳-۵ (بردار انحناء).** بردار انحناء بر یک منحنی را با $\overrightarrow{K(t)}$ نشان می‌دهـیم کـه بـه صورت زیر تعریف می شود:

$$\overrightarrow{K(t)} = \frac{\overrightarrow{T'(t)}}{\left|\overrightarrow{T'(t)}\right|}$$

**مثال۱-۳-۶.** بردار انحناء منحنی مثال ۱-۳-۴ را در $t=1$ بیابید.

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{R'(t)}}{\left|\overrightarrow{R'(t)}\right|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + 2t\vec{k}}{\sqrt{1+1+4t^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+4t^2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2+4t^2}}\vec{j} + \frac{2t}{\sqrt{2+4t^2}}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{T'(t)}=\frac{-4t}{\sqrt{(2+4t^2)^3}}\vec{i}+\frac{4t}{\sqrt{(2+4t^2)^3}}\vec{j}+\frac{-8t^2}{\sqrt{(2+4t^2)^3}}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{T'(1)}=\frac{-4}{\sqrt{6^3}}\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{6^3}}\vec{j}+\frac{-8}{\sqrt{6^3}}\vec{k}\Rightarrow\left|\overrightarrow{T'(1)}\right|=\sqrt{\frac{96}{6^3}}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{K(1)}=\frac{\frac{-4}{\sqrt{6^3}}\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{6^3}}\vec{j}+\frac{-8}{\sqrt{6^3}}\vec{k}}{\frac{2}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}$$

**تعریف۱-۳-۶ (بردار یکه قائم).** بردار یکه قائم بر یک منحنی را با $\overrightarrow{N(t)}$ نشان می‌دهیم که به صورت $\overrightarrow{N(t)}=\frac{\overrightarrow{K(t)}}{\left|\overrightarrow{K(t)}\right|}$ تعریف می‌شود.

**مثال۱-۳-۷.** بردار یکه قائم بر منحنی مثال۱-۳-۸ در $t=1$ بیابید.

$$\overrightarrow{K(1)}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}\Rightarrow\left|\overrightarrow{K(1)}\right|=\sqrt{\frac{6}{6}}=1$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{N(1)}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}-\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}$$

## تمرینات ۱-۳

۱- بردار وضعیت منحنی $\begin{cases} z = 2x^2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ را مشخص نموده، سرعت و شتاب را در $t = 1$ بیابید.

۲- بردار انحناء تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = t^3\,\vec{i} - 2t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ را در $t = 2$ بیابید.

۳- بردار یکه مماس بر تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ را بیابید.

۴- بردار یکه مماس بر تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = ti + 2t^2\vec{j} - 3t^3\vec{k}$ را در $t = 2$ بیابید.

۵- در تمرین ۴ بردار انحناء را در $t = 2$ بیابید.

۶- بردار یکه قائم بر تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = t^2\vec{i} - 4t\vec{j} + t^2\vec{k}$ را در $t = 2$ بیابید.

۷- تصویر بردار انحناء تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = t^3\,\vec{i} - 2t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ در $t = 1$ را نسبت به همان تابع برداری در $t = 2$ بیابید.

۸-زاویه بردار یکه مماس بر تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = t^2\vec{i} - 4t\vec{j} + t^2\vec{k}$ را در $t = 1$ و $t = 2$ بیابید.

۹- ضرب خارجی بردار انحناء تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = t^3\,\vec{i} - 2t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ در $t = 1$ را نسبت به همان تابع برداری در $t = 2$ بیابید.

**مثال‌های حل شده**

**۱-** نشان دهید که نقاط زیر راس‌های یک مثلث قائم الزاویه‌اند:

$$A=(5,1,5)\quad,\quad B=(4,3,2)\quad,\quad C=(-3,-2,1)$$

حل.

$$AB=\sqrt{(5-4)^2+(1-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{14}$$
$$AC=\sqrt{(5+3)^2+(1+2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{89}$$
$$BC=\sqrt{(4+3)^2+(3+2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{75}$$
$$AB^2+BC^2=14+75=89=AC^2$$

پس مثلث $ABC$ در راس $B$ قائمه است.

**۲-** اگر $\vec{V}$ یک بردار دلخواه باشد و $\left|\vec{V}\right|=3$، آن‌گاه مطلوباست $\left|5\vec{V}\right|\ ,\ \left|-\frac{3}{2}\vec{V}\right|$

حل.

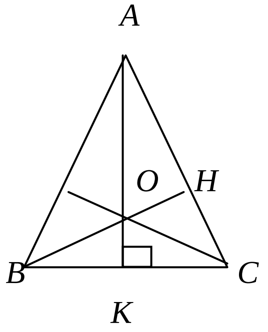
$$\left|-\frac{3}{2}\vec{V}\right|=\left|-\frac{3}{2}\right|\left|\vec{V}\right|=\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{2}$$
$$\left|5\vec{V}\right|=5\left|\vec{V}\right|=5\times 3=15$$

**۳-** اگر $\vec{V}_1\ ,\ \vec{V}_2$ دو بردار باشند، $\left(\vec{V}_1-\vec{V}_2\right)\bullet\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)$ را بیابید.

حل.

$$\left(\vec{V}_1-\vec{V}_2\right)\bullet\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=\vec{V}_1\bullet\vec{V}_1-\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2+\vec{V}_2\bullet\vec{V}_1-\vec{V}_2\bullet\vec{V}_2$$
$$=\vec{V}_1\bullet\vec{V}_1-\vec{V}_2\bullet\vec{V}_2=\left|\vec{V}_1\right|^2-\left|\vec{V}_2\right|^2$$

**۴**- با استفاده از بردارها ثابت کنید که ارتفاع‌های یک مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.




حل.

مثلث $ABC$ روبرو را در نظر می گیریم. محل برخورد دو ارتفاع $AK,CH$ از این مثلث را $O$ می نامیم. فرض کنید $\vec{OA}=\vec{V}_1\ ,\ \vec{OB}=\vec{V}_2\ ,\ \vec{OC}=\vec{V}_3$

در این صورت داریم:

$$AK \perp BC \Rightarrow \vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_3 - \vec{V}_2) = 0 \quad \Rightarrow \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$$
$$CH \perp AB \Rightarrow \vec{V}_3 \bullet (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = 0 \quad \Rightarrow \vec{V}_2 \bullet \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3$$

در صورتی سه ارتفاع مثلث در یک نقطه متقاطع‌اند که $\vec{OB},\vec{AC}$ برهم عمود باشند:

$$\vec{OB}\bullet \vec{AC} = \vec{V}_2 \bullet (\vec{V}_3 - \vec{V}_1) = \vec{V}_2 \bullet \vec{V}_3 - \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = 0$$

در نتیجه $\vec{OB},\vec{AC}$ بر هم عمودند. یعنی سه ارتفاع مثلث در یک نقطه متقاطع‌اند.

**۵**- اگر دو بردار $\vec{V}_2\ ,\ \vec{V}_1$ با یکدیگر زاویه ۱۲۰ درجه بسازند و $\left|\vec{V}_1\right| = 4\ ,\ \left|\vec{V}_2\right| = 3$ باشد، آن‌گاه مطلوب‌است محاسبه $\left|2\vec{V}_1 - \frac{3}{2}\vec{V}_2\right|$

حل.

$$\left|2\vec{V}_1 - \frac{3}{2}\vec{V}_2\right|^2 = \left(2\vec{V}_1 - \frac{3}{2}\vec{V}_2\right)\bullet\left(2\vec{V}_1 - \frac{3}{2}\vec{V}_2\right)$$
$$= \left|2\vec{V}_1\right|^2 + \left|\frac{3}{2}\vec{V}_2\right|^2 - 2\left(2\vec{V}_1\right).\left(\frac{3}{2}\vec{V}_2\right)$$
$$= 4\left|\vec{V}_1\right|^2 + \frac{9}{4}\left|\vec{V}_2\right|^2 - 6\left(\vec{V}_1.\vec{V}_2\right)$$
$$= 4\times 9 + \frac{9}{4}\times 16 - 6\left(\left|\vec{V}_1\right|\left|\vec{V}_2\right|\cos 120\right) = \sqrt{108}$$

۶- مساحت مثلثی را بیابید که سه نقطه زیر رئوس آن باشد:

$$A=(2,2,4)\quad,\quad B=(1,3,2)\quad,\quad C=(2,6,3)$$

حل.

مساحت مثلث برابر نصف مساحت متوازی الاضلاعی است که روی دو بردار $\vec{BA},\vec{BC}$ بنا می شود:

$$\vec{BA}=\langle 1,-1,2\rangle\quad,\quad \vec{BC}=\langle 1,3,1\rangle$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{BA}\times\vec{BC}\right|=\frac{1}{2}\left|\langle -7,1,4\rangle\right|=\frac{1}{2}\sqrt{66}$$

۷- اگر $\vec{V}_3\ ,\ \vec{V}_2,\vec{V}_1$ سه بردار در فضای سه بعدی $R^3$ باشند، نشان دهید:

$$\left[\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)\times\left(\vec{V}_2+\vec{V}_3\right)\right].\bullet\left(\vec{V}_3+\vec{V}_1\right)=2\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_2\right)\bullet\vec{V}_3$$

حل.

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)\times\left(\vec{V}_2+\vec{V}_3\right)\right]\bullet\left(\vec{V}_3+\vec{V}_1\right)\\
&=\left[\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_2\right)+\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_3\right)+\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_2\right)+\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_3\right)\right]\bullet\left(\vec{V}_3+\vec{V}_1\right)\\
&=\left[\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_2\right)+\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_3\right)+\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_3\right)\right].\bullet\left(\vec{V}_3+\vec{V}_1\right)\\
&=\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_2\right)\bullet\left(\vec{V}_3+\vec{V}_1\right)+\left(\vec{V}_2\times\vec{V}_3\right)\bullet\left(\vec{V}_3+\vec{V}_1\right)\\
&=\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_2\right)\bullet\vec{V}_3+\vec{V}_1\bullet\left(\vec{V}_3+\vec{V}_1\right)\\
&=\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_2\right)\bullet\vec{V}_3+\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_2\right)\bullet\vec{V}_3=2\left(\vec{V}_1\times\vec{V}_2\right)\bullet\vec{V}_3
\end{aligned}$$

۸- اگر $\vec{V}_2\ ,\ \vec{V}_1$ دو بردار یکه و $\theta$ زاویه بین آنها باشد، نشان دهید: $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left|\vec{V}_1-\vec{V}_2\right|$

حل:

$$\left|\vec{V}_1-\vec{V}_2\right|^2=\left(\vec{V}_1-\vec{V}_2\right)\left(\vec{V}_1-\vec{V}_2\right)=\left|\vec{V}_1\right|^2+\left|\vec{V}_2\right|^2-2\left(\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2\right)$$

$$=2-2\left(\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2\right)=2-2\left|\vec{V}_1\right|\left|\vec{V}_2\right|\cos\theta=2(1-\cos\theta)=2\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left|\vec{V}_1-\vec{V}_2\right|$$

**۹**- تصویر قائم بردار $\vec{V}_1=\langle 2,-1,3\rangle$ را تحت بردار $\vec{V}_2=\langle 1,-3,-1\rangle$ بیابید.

حل.

$$\vec{V}_1'=\frac{\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2}{\left|\vec{V}_2\right|^2}\vec{V}_2=\frac{2+3-3}{1+9+1}\langle 1,-3,-1\rangle=\left\langle\frac{2}{11},\frac{-6}{11},\frac{-2}{11}\right\rangle$$

**۱۰**- اگر $\vec{V}_1$ , $\vec{V}_2$ دو بردار یکه و $\theta$ زاویه بین آنها باشد، بازای چه مقادیری برای $\theta$ در بازه $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مقدار $\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2$ بیشترین مقدار است.

حل.

$$\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2=\left|\vec{V}_1\right|\left|\vec{V}_2\right|\cos\theta$$

$$\left|\vec{V}_1\right|=\left|\vec{V}_2\right|=1\ \Rightarrow\ \vec{V}_1\bullet\vec{V}_2=\cos\theta$$

که بازای $\theta=0$ بیشترین و بازای $\theta=\pi$ کمترین مقدار را دارد.

**۱۱**- نشان دهید که چهارضلعی با راس های زیر یک متوازی الاضلاع است و سپس مساحت آنرا بیابید:

$$P=(1,-2,3)\ ,\ Q=(4,3,-1)\ ,\ R=(4,3,-1)\ ,\ S=(5,7,-3)$$

حل.

$$P\vec{Q}=\langle 3,5,-4\rangle\ ,\ P\vec{R}=\langle 1,4,-2\rangle\ ,\ R\vec{S}=\langle 3,5,-4\rangle\ ,\ Q\vec{S}=\langle 1,4,-2\rangle$$

چون $P\vec{Q}=R\vec{S}$ , $P\vec{R}=Q\vec{S}$ پس چهارضلعی مورد نظر متوازی الاضلاع است. با فرض $\vec{V}_1=P\vec{R}$ , $\vec{V}_2=P\vec{Q}$ داریم:

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = -6\vec{i} - 2\vec{j} - 7\vec{k}$$

درنتیجه:
$$S = \left|\vec{V_1} \times \vec{V_2}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{89}$$

**۱۲**- حجم متوازی السطوحی را به راس های زیر و اضلاع $P\vec{Q}$ , $P\vec{R}$ , $P\vec{S}$ بیابید.

$$P = (5,4,5)\ ,\ Q = (4,10,6)\ ,\ R = (1,8,7)\ ,\ S = (2,6,9)$$

حل.

$$\vec{V_1} = P\vec{Q} = \langle -1,6,1 \rangle\ ,\ \vec{V_2} = P\vec{R} = \langle -4,4,2 \rangle\ ,\ \vec{V_3} = P\vec{S} = \langle -3,2,4 \rangle$$

پس:
$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = 8\vec{i} - 2\vec{j} + 20\vec{k}$$

درنتیجه:
$$V = \left(\vec{V_1} \times \vec{V_2}\right) . \vec{V_3} = \langle 8,-2,20 \rangle \bullet \langle -3,2,4 \rangle = 52$$

**۱۳**- بردار یکه مماس بر تابع برداری $\overrightarrow{R(t)} = ti + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ را در $t = 1$ بیابید.

حل.

$$\overrightarrow{R'(t)} = i + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{R'(t)}\right| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{R'(t)}}{\left|\overrightarrow{R'(t)}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}(i + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k})$$

درنتیجه:
$$\overrightarrow{T(1)} = \frac{1}{\sqrt{14}}(i + 2\vec{j} + 3\vec{k})$$

**تمرینات**

۱- مساحت مثلثی را بیابید که نقاط زیر رئوس آن باشد:

$$A=(2,4)\,,\; B=(1,7)\,,\; C=(4,5)$$

۲- زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1=\langle -5\,,3\rangle$ , $\vec{V}_2=\langle 2\,,6\rangle$ را بیابید.

۳- اگر $\vec{V}_1=\langle 2,7\rangle$ , $\vec{V}_2=\langle 4,3\rangle$ , $\vec{V}_3=<-5\,,3>$ آن‌گاه دو اسکالر $k,h$ را طوری بیابید که $h\vec{V}_1-k\vec{V}_2=\vec{V}_3$

۴- مختصات مرکز و اندازه شعاع کره‌ای را بیابید که معادله آن به صورت زیر باشد:

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z-3=0$$

۵- زوایای هادی و بردار یکه همجهت با بردار $\vec{V}=\langle 1,-5,6\rangle$ را بنویسید.

۶- زاویه بین دو بردار $\vec{V}_1=\langle 4,3,-1\rangle$ و $\vec{V}_2=\langle 3,-2,6\rangle$ را بیابید.

۷- اگر $A=(1,0,-1)$ , $B=(2,1,-2)$ , $C=(0,1,-1)$ سه نقطه باشند آن‌گاه تصویر بردار $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ را تحت بردار $\overrightarrow{CA}$ بیابید.

۸- تصویر و قرینه بردار $\vec{V}_1=\langle -3,-5,1\rangle$ نسبت به بردار $\vec{V}_2=\langle 1,2,4\rangle$ را بیابید.

۹- اگر $\vec{V}_1\,,\vec{V}_2$ دو بردار باشند، $\left(\vec{V}_1-2\vec{V}_2\right)\left(2\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)$ را بیابید.

۱۰- اگر $\vec{V}_1\,,\vec{V}_2$ دو بردار یکه و $\theta$ زاویه بین آنها باشد، بازای چه مقادیری برای $\theta$ در بازه $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ مقدار $\vec{V}_1\bullet\vec{V}_2$ حداقل است.

۱۱- مساحت متوازی الاضلاعی را بدست آورید که توسط بردارهای زیر تولید می شود:

$$\vec{V}_1=\langle 4,5,1\rangle \text{ و } \vec{V}_2=\langle 1,3,5\rangle$$

۱۲- حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار $\vec{V}_1=\langle 0,0,1\rangle$ و $\vec{V}_2=\langle 1,-1,0\rangle$ و $\vec{V}_3=\langle 1,0,1\rangle$ بنا می‌شود را بیابید.

۱۳- بردار انحناء تابع برداری $\overrightarrow{R(t)}=t^3\,\vec{i}+3t^2\,\vec{j}+4t\,\vec{k}$ را در $t=2$ بیابید.

۱۴- بردار یکه مماس بر تابع برداری $\overrightarrow{R(t)}=2ti+2t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ را در $t=3$ بیابید.

۱۵- تصویر بردار انحناء تابع برداری $\overrightarrow{R(t)}=t^3\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}-t\,\vec{k}$ در $t=1$ را نسبت به همان تابع برداری در $t=2$ بیابید.

۱۶- ضرب خارجی بردار انحناء تابع برداری $\overrightarrow{R(t)}=t^3\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}+2t\,\vec{k}$ در $t=1$ را نسبت به همان تابع برداری در $t=1$ بیابید.